Théorèmes limites et applications – MdA Paris-Saclay – Examen

Mardi 11 janvier 2022 – 9h-12h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

(1) Énoncer le théorème de Prokhorov.

(2) Énoncer un critère de tension pour une suite $(X^n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],E)$, où (E,d) est un espace polonais et $\mathcal{C}([0,1],E)$ est l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans E muni de la distance $d(f,g)=\sup_{x\in[0,1]} d(f(x),g(x))$.

(3) Énoncer le théorème local limite.

***

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité telles que $Y_n \geq X_n \geq 0$ et $\mathbb{E}[Y_n]=1$ pour tout $n\geq 1$. On suppose que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire positive X telle que $\mathbb{E}[X]=1$.

(1) Montrer que la suite de variables aléatoires $((X_n,Y_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers (X,X).

(2) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

***

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes, de même loi, de variance finie σ^2. On suppose que $\mathbb{E}[X_1]=0$ et que $\mathbb{P}(X_1=k)>0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Pour $n\geq 1$, on pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$ et on note μ_n la loi de X_1 sachant que $S_n=0$.

(1) Démontrer que la suite de mesure de probabilités $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement.

(2) Alix dit : en notant Y_n une variable aléatoire de loi μ_n, la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. A-t-elle raison ?

***

Exercice 3. Dans cet exercice, on note $\mathbb{R}^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$ et $\mathcal{C}=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme uniforme et la tribu borélienne associée. On considère un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

(1) Montrer que la tribu borélienne de $\mathcal{C}$ est égale à l'ensemble des A de la forme $A=B\cap\mathcal{C}$ pour $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$.

Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ sont deux variables aléatoires, on dit que Y est une *modification* (ou *version*) de X si pour tout $t \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1$.

(2) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ deux variables aléatoires.

(a) Vérifier que si Y est une modification de X, alors X et Y ont la même loi.

(b) Billie dit : la réciproque de (a) est vraie. A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

$\boxed{\text{Dans toute la suite de cet exercice, on fixe une variable aléatoire } Y : \Omega \to \mathcal{C}.}$ (Ainsi Y_ω est une fonction continue pour tout $\omega \in \Omega$.)

(3) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ une variable aléatoire. On suppose que X et Y ont la même loi.

(a) Notons $Y^\star$ la variable aléatoire Y vue comme fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Démontrer qu'il existe une application mesurable $F : \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathcal{C}$ telle que $Y = F \circ Y^\star$.

Indication. On pourra utiliser le lemme de Doob-Dynkin, qui est le résultat suivant. Lorsque f, g sont deux fonctions mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans respectivement $(S, \mathcal{S})$ et $(T, \mathcal{T})$, si $f : (\Omega, \sigma(g)) \to (S, \mathcal{S})$ est mesurable et si $(S, \mathcal{S})$ est un espace polonais muni de de sa tribu borélienne, alors il existe une application mesurable $h : (T, \mathcal{T}) \to (S, \mathcal{S})$ telle que $f = h \circ g$.

(b) Démontrer qu'il existe une variable aléatoire $X' : \Omega \to \mathcal{C}$ telle que X' soit une modification de X.

(4) (a) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique (E, d) complet séparable. On suppose que les deux suites $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ ont même loi. Montrer que $\{(U_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\}$ (c'est-à-dire l'ensemble $\{\omega \in \Omega : U_n(\omega) \text{ converge quand } n \to \infty\}$) est un événement (i.e. est mesurable) et que

$$\mathbb{P}\left((U_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\right) = \mathbb{P}\left((V_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\right).$$

(b) On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{[0,1]}$ telle que X_n converge vers Y au sens des marginales fini-dimensionnelles. On suppose aussi que pour tout $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, la suite $(X_n(q))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathcal{C}$ telle que pour tout $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, la suite $(X_n(q))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $X(q)$.

***

Petit problème. Les trois parties de ce problème sont indépendantes, sauf la question (6) qui utilise des résultats de parties précédentes.

Notations et rappels. Pour un espace vectoriel E et $A \subset E$, on note $\mathrm{co}(A)$ l'enveloppe convexe de A, définie par

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : n \geq 1, a_i \in A \text{ et } \lambda_i \in [0,1] \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

On note $\mathbb{D} = \mathbb{D}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie J_1 de Skorokhod. Pour $x \in \mathbb{D}$ et $0 < t \leq 1$, on note $\Delta x(t) = x(t) - x(t-)$ et $\Delta x(0) = 0$. Pour $0 < \delta \leq 1$ et $x \in \mathbb{D}$ on note

$$\omega'(x, \delta) = \inf \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{s,t \in [t_{i-1}, t_i[} |x(s) - x(t)|,$$

où l'infimum est pris sur toutes les partitions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ de $[0, 1]$ telles que $\min_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1}) > \delta$.

Pour un espace métrique E et $A \subset E$, on rappelle que A est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, A peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε, et que A est dit relativement compact si $\overline{A}$ est compact. Si E est complet, on rappelle qu'une partie est précompacte si et seulement si elle est relativement compacte.

On rappelle qu'une famille $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}$ est relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\sup_{x \in \mathcal{F}} \|x\|_\infty < \infty$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \sup_{x \in \mathcal{F}} \omega'(x, \delta) \le \varepsilon$.

Première partie. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet séparable.

(1) Si $K \subset E$ est compact, montrer que l'enveloppe convexe de K, notée $\mathrm{co}(K)$ est précompacte.

(2) Montrer que toute mesure de probabilité sur E est convexe-tendue, au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact convexe K tel que $\mu(K) \ge 1 - \varepsilon$.

Deuxième partie.

(3) On considère
$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \mathbb{1}_{[s,1]} : \frac{1}{4} \le s \le \frac{3}{4} \right\}.$$
Justifier que $\mathcal{F}_0$ est relativement compact dans $\mathbb{D}$ et que $\mathrm{co}(\mathcal{F}_0)$ n'est pas relativement compact dans $\mathbb{D}$.

Pour $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}$ et $\varepsilon > 0$, on note
$$S_\varepsilon(F) = \left\{ t \in [0, 1] : \sup_{x \in \mathcal{F}} |\Delta x(t)| > \varepsilon \right\}.$$

(4) On suppose que $K \subset \mathbb{D}$ est une partie relativement compacte. Montrer que si $\mathrm{co}(K)$ est relativement compact, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) < \infty$.

Troisième partie. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{D}$. On dit que X est continu en probabilité si pour toute suite $t_n \to t$, la suite $(X(t_n))_{n \ge 1}$ converge en probabilité vers $X(t)$ lorsque $n \to \infty$.

(5) Donner un exemple où $\forall \omega \in \Omega$, X_ω n'est pas continu mais X est continu en probabilité.

(6) On suppose que X est continu en probabilité et que sa loi est convexe-tendue. Démontrer que X est continu p.s.

(7) Toute mesure de probabilité sur $\mathbb{D}$ est-elle convexe-tendue ? Est-ce contradictoire avec (2) ?

Question bonus hors barème de l'examen : On suppose que $K \subset \mathbb{D}$ est une partie relativement compacte. Montrer que si $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$ alors $\mathrm{co}(K)$ est relativement compact.

Fin