Théorèmes limites et applications – MdA Paris-Saclay – Examen
Mardi 11 janvier 2022 – 9h-12h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

(1) Énoncer le théorème de Prokhorov.

(2) Énoncer un critère de tension pour une suite $(X^n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],E)$, où (E,d) est un espace polonais et $\mathcal{C}([0,1],E)$ est l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans E muni de la distance $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} d(f(x),g(x))$.

(3) Énoncer le théorème local limite.

***

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité telles que $Y_n \geq X_n \geq 0$ et $\mathbb{E}[Y_n] = 1$ pour tout $n \geq 1$. On suppose que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire positive X telle que $\mathbb{E}[X] = 1$.

(1) Montrer que la suite de variables aléatoires $((X_n, Y_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers (X,X).

(2) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

Corrigé :

(1) La suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ étant bornée dans L^1, elle est tendue. La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ est également tendue (d'après le théorème de Prokhorov, puisqu'elle converge en loi). La suite de variables aléatoires $((X_n, Y_n))_{n\geq 1}$ est donc tendue. Il existe ainsi une extraction φ et une variable aléatoire (U,V) telle que $(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)}) \to (U,V)$ en loi, avec $U = X$ en loi. D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que cette convergence a lieu p.s. On a également $X_{\varphi(n)} \leq Y_{\varphi(n)}$ p.s. (c'est une propriété qui ne dépend que de la loi de $(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)})$). En particulier, $U \leq V$ p.s. D'après le lemme de Fatou, on a $\mathbb{E}[V] \leq 1$, et comme $\mathbb{E}[U] = 1$, on en déduit que $\mathbb{E}[V] = 1$. Donc $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[V]$ avec $U \leq V$ p.s., ce qui entraîne $U = V$ p.s.

Autre solution (mais qui ne montre pas que $\mathbb{E}[Y_n] \to 1$*).* Par l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mathbb{P}(|Y_n - X_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[Y_n - X_n] \to 0$, donc $Y_n - X_n$ tend en probabilité vers 0. D'après le lemme de Slutsky, $(Y_n - X_n, X_n) \to (0, X)$ en loi, et donc par continuité de $(a,b) \mapsto (a, a+b)$ on a bien la convergence en loi de (Y_n, X_n) vers (X,X).

(2) D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que Y_n converge p.s. vers X. Comme $\mathbb{E}[Y_n] \to 1 = \mathbb{E}[X]$ (d'après la preuve de (1)), le lemme de Scheffé

entraîne que $Y_n \to X$ dans L^1, ce qui implique par résultat du cours que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

$\square$

* * *

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes, de même loi, de variance finie σ^2. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et que $\mathbb{P}(X_1 = k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on note μ_n la loi de X_1 sachant que $S_n = 0$.

(1) Démontrer que la suite de mesure de probabilités $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement.

(2) Alix dit : en notant Y_n une variable aléatoire de loi μ_n, la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. A-t-elle raison ?

Corrigé :

(1) On écrit, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mu_n(k) = \mathbb{P}(X_1 = k | S_n = 0) = \mathbb{P}(X_1 = k) \cdot \frac{\mathbb{P}(S_{n-1} = -k)}{\mathbb{P}(S_n = 0)}.$$

D'après le théorème local limite le numérateur et le dénominateur sont tous les deux équivalents à $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 n}}$, de sorte que

$$\mu_n(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X_1 = k).$$

Ainsi, μ_n converge étroitement vers la loi de X_1.

(2) Oui, elle a raison. Vérifions que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans L^2, ce qui entrainera le résultat désiré. On a

$$\mathbb{E}[Y_n^2] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \mathbb{P}(X_1 = k) \cdot \frac{\mathbb{P}(S_{n-1} = -k)}{\mathbb{P}(S_n = 0)}.$$

D'après le théorème local limite, il existe une constante $C > 0$ telle que $\frac{\mathbb{P}(S_{n-1}=-k)}{\mathbb{P}(S_n=0)}$ pour tout $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, et le résultat s'ensuit.

$\square$

* * *

Exercice 3. Dans cet exercice, on note $\mathbb{R}^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme uniforme et la tribu borélienne associée. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(1) Montrer que la tribu borélienne de $\mathcal{C}$ est égale à l'ensemble des A de la forme $A = B \cap \mathcal{C}$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$.

Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ sont deux variables aléatoires, on dit que Y est une *modification* (ou *version*) de X si pour tout $t \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1$.

(2) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ deux variables aléatoires.

(a) Vérifier que si Y est une modification de X, alors X et Y ont la même loi.

(b) Billie dit : la réciproque de (a) est vraie. A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

Dans toute la suite de cet exercice, on fixe une variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathcal{C}$. (Ainsi Y_ω est une fonction continue pour tout $\omega \in \Omega$.)

(3) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ une variable aléatoire. On suppose que X et Y ont la même loi.

(a) Notons $Y^\star$ la variable aléatoire Y vue comme fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Démontrer qu'il existe une application mesurable $F : \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathcal{C}$ telle que $Y = F \circ Y^\star$.

Indication. On pourra utiliser le lemme de Doob-Dynkin, qui est le résultat suivant. Lorsque f, g sont deux fonctions mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans respectivement $(S, \mathcal{S})$ et $(T, \mathcal{T})$, si $f : (\Omega, \sigma(g)) \to (S, \mathcal{S})$ est mesurable et si $(S, \mathcal{S})$ est un espace polonais muni de de sa tribu borélienne, alors il existe une application mesurable $h : (T, \mathcal{T}) \to (S, \mathcal{S})$ telle que $f = h \circ g$.

(b) Démontrer qu'il existe une variable aléatoire $X' : \Omega \to \mathcal{C}$ telle que X' soit une modification de X.

(4) (a) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique (E, d) complet séparable. On suppose que les deux suites $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ ont même loi. Montrer que $\{(U_n)_{n\geq 1}$ converge$\}$ (c'est-à-dire l'ensemble $\{\omega \in \Omega : U_n(\omega)$ converge quand $n \to \infty\}$) est un événement (i.e. est mesurable) et que

$$\mathbb{P}\left((U_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\right) = \mathbb{P}\left((V_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\right).$$

(b) On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{[0,1]}$ telle que X_n converge vers Y au sens des marginales fini-dimensionnelles. On suppose aussi que pour tout $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, la suite $(X_n(q))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathcal{C}$ telle que pour tout $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, la suite $(X_n(q))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $X(q)$.

Corrigé :

(1) On a vu dans le cours que la tribu borélienne de $\mathcal{C}$ est égale à sa tribu produit, i.e. la plus petite tribu rendant les projections $\pi_t : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ mesurables pour $t \in [0,1]$. Vérifions que celle-ci est égale à $\mathcal{F} = \{B \cap \mathcal{C} : B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$ mesurable$\}$.

Tout d'abord, $\mathcal{F}$ est bien une tribu. Ensuite, pour tout $t \in [0,1]$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{f \in \mathcal{C} : f(t) \in A\} = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f(t) \in A\} \cap \mathcal{C}$, la tribu $\mathcal{F}$ rend bien toutes les projections mesurables.

Enfin, soit $\mathcal{G}$ une tribu sur $\mathcal{C}$ qui rend toutes les projections mesurables et considérons

$$\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]} : B \cap \mathcal{C} \in \mathcal{G}\}.$$

On vérifie que c'est une tribu de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ qui contient les cylindres de $\mathbb{R}^{[0,1]}$, elle est donc égale à $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$, ce qui conclut.

(2) (a) Si Y est une modification de X, pour $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq 1$ on a $(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = (Y(t_1), \ldots, Y(t_n))$ presque sûrement, de sorte que ces deux vecteurs aléatoires ont bien

même loi.

(b) Non, il a tort : on prend par exemple ε une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$ et on pose $X(t) = \varepsilon$ et $Y(t) = 1 - \varepsilon$ pour $0 \leq t \leq 1$.

(3) (a) Remarquons qu'en notant $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ l'inclusion (mesurable d'après (1)), on a $Y^\star = I \circ Y$ (en particulier, $Y^\star$ est mesurable comme composée d'applications mesurables). Vérifions que $Y : (\Omega, \sigma(Y^\star)) \to \mathcal{C}$ est mesurable. Soit A un ensemble mesurable de $\mathcal{C}$. D'après (1), il s'écrit $A = B \cap \mathcal{C} = I^{-1}(B)$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes[0,1]}$, de sorte que

$$Y^{-1}(A) = (Y^\star)^{-1}(B)$$

est bien dans $\sigma(Y^\star)$.

D'après le lemme de Doob-Dynkin, puisque $\mathcal{C}$ est polonais, il existe une application mesurable $F : \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathcal{C}$ telle que $Y = F \circ Y^\star$.

(b) On pose $X' = F \circ X$, qui est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}$. Vérifions que pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{P}(X(t) = X'(t)) = 1$. Remarquons que puisque X et Y ont la même loi, X et $Y^\star$ ont la même loi. Donc $(X, X') = (X, F(X))$ et $(Y^\star, Y) = (Y^\star, F(Y^\star))$ ont même loi. Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(X(t) = X'(t)) = \mathbb{P}(Y^\star(t) = Y(t)) = 1.$$

(4) (a) Puisque E est complet, une suite d'éléments de E converge si et seulement si elle est de Cauchy. Ainsi,

$$\{(U_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{N\geq 0} \bigcap_{p,q\geq N} \left\{ d(U_p, U_q) \leq \frac{1}{n} \right\},$$

et les résultats désirés s'ensuivent.

(b) Pour $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, notons $Z(q)$ la limite presque sûre de la suite $(X_n(q))_{n\geq 1}$. En particulier, sur $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, les marginales fini-dimensionnelles de Z et de Y coïncident. On prolonge Z à $[0,1]$ en une variable aléatoire de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ayant les mêmes marginales fini-dimensionnelles que Y en posant $Z(t) = Y(t)$ pour $t \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$.

D'après (2b), il existe une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathcal{C}$ qui soit une modification de Z. Pour $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, puisque $X_n(q)$ converge p.s. vers $Z(q)$ et que $Z(q) = X(q)$ p.s., ceci conclut.

Remarque. Le résultat reste vrai si Y n'est pas défini sur le même espace de probabilité que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$: on peut encore prolonger Z à $[0,1]$ en une variable aléatoire de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ayant les mêmes marginales fini-dimensionnelles que Y en utilisant la question (4a).

En effet effet, pour tout $t \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$, considérons une suite de rationnels $q_n \to t$. Par continuité de Y, $Y(q_n)$ converge p.s. vers $Y(t)$. Puisque Z et Y ont les mêmes marginales fini-dimensionnelles, les deux suites $(Y(q_n))_{n\geq 1}$ et $(Z(q_n))_{n\geq 1}$ ont même loi. Par (4a), il existe donc une variable aléatoire notée $Z(t)$, limite presque sûre de $(Z(q_n))_{n\geq 1}$. Il s'ensuit que Z a les mêmes marginales fini-dimensionnelles que Y.

Remarque. Cet exercice est inspiré par le Theorem 3.24 dans O. Kallenberg, Foundations of Modern Probability (2nd Edition), Springer.

□

* * *

Petit problème. Les trois parties de ce problème sont indépendantes, sauf la question (6) qui utilise des résultats de parties précédentes.

Notations et rappels. Pour un espace vectoriel E et $A \subset E$, on note $\mathrm{co}(A)$ l'enveloppe convexe de A, définie par

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : n \geq 1, a_i \in A \text{ et } \lambda_i \in [0,1] \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

On note $\mathbb{D} = \mathbb{D}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie J_1 de Skorokhod. Pour $x \in \mathbb{D}$ et $0 < t \leq 1$, on note $\Delta x(t) = x(t) - x(t-)$ et $\Delta x(0) = 0$. Pour $0 < \delta \leq 1$ et $x \in \mathbb{D}$ on note

$$\omega'(x,\delta) = \inf \max_{1\leq i\leq n} \sup_{s,t \in [t_{i-1},t_i[} |x(s) - x(t)|,$$

où l'infimum est pris sur toutes les partitions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ de $[0,1]$ telles que $\min_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) > \delta$.

Pour un espace métrique E et $A \subset E$, on rappelle que A est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, A peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε, et que A est dit relativement compact si $\overline{A}$ est compact. Si E est complet, on rappelle qu'une partie est précompacte si et seulement si elle est relativement compacte.

On rappelle qu'une famille $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}$ est relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\sup_{x\in\mathcal{F}} \|x\|_\infty < \infty$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \sup_{x\in\mathcal{F}} \omega'(x,\delta) \leq \varepsilon$.

Première partie. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet séparable.

(1) Si $K \subset E$ est compact, montrer que l'enveloppe convexe de K, notée $\mathrm{co}(K)$ est précompacte.

(2) Montrer que toute mesure de probabilité sur E est convexe-tendue, au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact convexe K tel que $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$.

Corrigé :

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité de K, on peut écrire $K = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Alors $\mathrm{co}(K)$ est inclus dans le ε voisinage fermé de $\mathrm{co}(x_1, \ldots, x_n)$, qui est précompact puisqu'on voit aisément que $\mathrm{co}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ est compact.

(2) Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Prokhorov, il existe un compact C tel que $\mu(C) \geq 1 - \varepsilon$. On obtient le résultat désiré en prenant $K = \overline{\mathrm{co}(C)}$.

□

Deuxième partie.

(3) On considère

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \mathbb{1}_{[s,1]} : \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4} \right\}.$$

Justifier que $\mathcal{F}_0$ est relativement compact dans $\mathbb{D}$ et que $\mathrm{co}(\mathcal{F}_0)$ n'est pas relativement compact dans $\mathbb{D}$.

Pour $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}$ et $\varepsilon > 0$, on note

$$S_\varepsilon(F) = \left\{ t \in [0,1] : \sup_{x \in \mathcal{F}} |\Delta x(t)| > \varepsilon \right\}.$$

(4) On suppose que $K \subset \mathbb{D}$ est une partie relativement compacte. Montrer que si $\mathrm{co}(K)$ est relativement compact, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) < \infty$.

Corrigé :

(3) On a bien $\sup_{x \in \mathcal{F}_0} \|x\|_\infty < \infty$. D'autre part, pour $\varepsilon > 0$, en prenant $\delta < 1/4$, on a $\sup_{x \in \mathcal{F}_0} \omega'(x, \delta) = 0$. Ainsi, $\mathcal{F}_0$ est relativement compact. En revanche, en prenant

$$x_n = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[1/2 - 1/n, 1]} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[1/2 + 1/n, 1]} \in \mathrm{co}(\mathcal{F}_0),$$

la suite (x_n) n' pas de sous-suites qui convergent, de sorte que $\mathrm{co}(\mathcal{F}_0)$ n'est pas relativement compact dans $\mathbb{D}$.

(4) On raisonne par l'absurde. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) = \infty$. Il existe alors $u_0 \in [0,1]$ et une suite (u_n) d'éléments distincts de $S_\varepsilon(K)$ convergeant vers u_0, et une suite (x_n) d'éléments de K tels que $|\Delta x_n(u_n)| > \varepsilon$. Par compacité de K, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\sup_{x \in K} w'(x, \delta_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit maintenant $0 < \delta < \delta_0$. On a encore

$$\sup_{x \in K} w'(x, \delta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $x_{m,n} = \frac{1}{2} x_m + \frac{1}{2} x_n$. On va vérifier que $w'(x_{m,n}, \delta) \geq \varepsilon/4$ pour m, n assez grands.

À cet effet, fixons $m, n \geq 1$ tels que $u_0 - \delta/2 < u_m, u_n < u_0 + \delta/2$ et $|\Delta x_n(u_n)| > \varepsilon$ et $|\Delta x_m(u_m)| > \varepsilon$. A fortiori, pour $i = m, n$:

$$\sup_{u_i \leq s,t < u_i + \delta} |x_i(t) - x_i(s)| < \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad \sup_{u_i - \delta \leq s,t < u_i} |x_i(t) - x_i(s)| < \varepsilon/2.$$

On considère une partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ de $[0,1]$ telle que que $\min_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1}) > \delta$. Comme $|u_m - u_n| < \delta$, $\{t_0, \dots, t_n\}$ peut contenir u_m ou u_n, ou aucun des deux, mais pas les deux. En séparant les cas, on obtient aisément que $w'(x_{m,n}, \delta) \ge \varepsilon/4$. Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, on aboutit à une contradiction.

□

Troisième partie. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{D}$. On dit que X est continu en probabilité si pour toute suite $t_n \to t$, la suite $(X(t_n))_{n\ge 1}$ converge en probabilité vers $X(t)$ lorsque $n \to \infty$.

(5) Donner un exemple où $\forall \omega \in \Omega$, X_ω n'est pas continu mais X est continu en probabilité.

(6) On suppose que X est continu en probabilité et que sa loi est convexe-tendue. Démontrer que X est continu p.s.

(7) Toute mesure de probabilité sur $\mathbb{D}$ est-elle convexe-tendue ? Est-ce contradictoire avec (2) ?

Question bonus hors barème de l'examen : On suppose que $K \subset \mathbb{D}$ est une partie relativement compacte. Montrer que si $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$ alors $\mathrm{co}(K)$ est relativement compact.

Corrigé :

(5) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$. On pose $X = \mathbb{1}_{[U,1]}$, qui convient. En effet, pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X(t_n) - X(t)| \ge \varepsilon) \le \mathbb{P}(U \in [\min(t_n, n), \max(t_n, t)]) = |t_n - t| \to 0$.

(6) Soit $\eta > 0$ et K un compact convexe tel que $\mathbb{P}(X \in K) \ge 1 - \eta$. D'après (4), pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Card}(S_\varepsilon(K)) < \infty$. Il existe donc $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que

$$\mathbb{P}(|\Delta X(t)| < \varepsilon \text{ pour } t \in [0,1] \backslash \{t_1, \dots, t_n\}) \ge \mathbb{P}(X \in K) \ge 1 - \eta.$$

Remarquons que si $\mathbb{P}(|\Delta X(t)| \ge \varepsilon) > 0$, alors X n'est pas continu en probabilité. Ainsi

$$\mathbb{P}(|\Delta X(t)| < \varepsilon \text{ pour } t \in [0,1] \backslash \{t_1, \dots, t_n\}) = \mathbb{P}(|\Delta X(t)| < \varepsilon \text{ pour } t \in [0,1]) \ge 1 - \eta.$$

En faisant $\varepsilon \downarrow 0$, on en déduit que $\mathbb{P}(X \text{ est continu}) \ge 1 - \eta$. On conclut en faisant $\eta \downarrow 0$.

(7) Soit X l'exemple de la question (5). D'après les questions (5) et (6), sa loi n'est pas convexe-tendue. Ce n'est pas contradictoire avec (2) car $\mathbb{D}$ muni de la topologie J_1 de Skorokhod n'est pas une topologie d'espace vectoriel normé.

Remarque. Ce problème est inspiré par la Remark 2.5 dans

Basse-O'Connor, Andreas, and Jan Rosiński. "On the uniform convergence of random series in Skorohod space and representations of cadlag infinitely divisible processes." The Annals of Probability 41.6 (2013) : 4317-4341.

https://arxiv.org/pdf/1111.1682.pdf

Pour la question hors barème, voir le Theorem 6 dans Peter Z. Daffer, Robert L. Taylor "Laws of Large Numbers for $D[0,1]$, *Ann. Probab.* **7**(1), 85-95, (February, 1979) □

Fin