Théorèmes limites et applications – MdA Paris-Saclay – Examen

Vendredi 8 janvier 2021 – 14h-17h

Les documents ne sont pas autorisés. La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation. Toutes les questions doivent être traitées en utilisant seulement les résultats du cours (il faut donc démontrer tout ce qui n'y serait pas). Le sujet comporte 3 pages.

Questions de cours.

1. Énoncer le théorème de porte-manteau.
2. Donner la définition d'une mesure aléatoire de Poisson.
3. Soit (E, d) un espace métrique polonais et μ une mesure de probabilité sur E muni de sa tribu borélienne. Montrer que μ est tendue.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles.

1. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est tendue. Alix dit : la réciproque est vraie. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.
2. On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est tendue et que pour tout $r \in \mathbb{R}$ la suite $(\mathbb{P}(X_n \geq r))_{n\geq 1}$ converge. Montrer qu'alors (X_n) converge en loi. Billie dit : ce résultat reste vraie sans l'hypothèse de tension. A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.
3. Camille dit : on peut trouver deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur le même espace de probabilité, de même loi et telles que $X < Y$ presque sûrement. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1])$, l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. On suppose qu'il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que

$$\forall 0 \leq s,t \leq 1, \quad \mathbb{E}[(X_1(s) - X_1(t))^2] \leq C|s-t|^{1+\varepsilon}, \qquad \forall 0 \leq s \leq 1, \quad \mathbb{E}[X_1(s)] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X_1(s)^2] < \infty.$$

On pose

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

1. Pour $0 \leq s,t \leq 1$, calculer $\mathbb{E}[(Z_n(s) - Z_n(t))^2]$.
2. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{D}$ et $x \in \mathbb{D}$ tels que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x au sens de Skorokhod. Montrer que $\int_0^1 |x_n(t) - x(t)| \mathrm{d}t \to 0$.

Exercice 4. On note $\widehat{\Lambda}$ l'ensemble des fonctions $\lambda : [0,1] \to [0,1]$ continues, *croissantes* telles que $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$, et $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions càdlàg de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{D}$ et $x \in \mathbb{D}$. On suppose que

$$\inf_{\lambda \in \widehat{\Lambda}} \max(\|\lambda - \mathrm{Id}\|_\infty, \|x_n \circ \lambda - x\|_\infty) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dominique dit : alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x au sens de Skorokhod. A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

Rappel : la convergence au sens de Skorokhod est définie avec des changements de temps *strictement croissants*.

Dans tout le problème, il est possible d'admettre le résultat d'une question pour l'utiliser dans une question ultérieure.

Problème. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $\mathbb{E}[X_1]=0$, $0<\mathbb{E}[X_1^2]<\infty$ et $\mathbb{P}(X_1=k)>0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. On note σ^2 la variance de X_1, on pose $p=\mathbb{P}(X_1=0)$ et on définit pour tout entier $n\geq 1$.

$$W_n = X_1+\cdots+X_n, \qquad Z_n=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{X_k=0}.$$

Pour $t\geq 0$, W_t et Z_t sont définis par interpolation linéaire.

Préliminaires.

1. Montrer que pour une constante $c>0$ qu'on déterminera, la convergence

$$\left(\frac{Z_{sn}-psn}{\sqrt{cn}}, \frac{W_{sn}}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{0\leq s\leq 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad (B_s^1, B_s^2)_{0\leq s\leq 1} \tag{1}$$

a lieu en loi dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^2)$, où B^1 et B^2 sont deux mouvements browniens standards indépendants.

Première partie. On fixe $0<u<1$ et $F:\mathcal{C}([0,u])\to\mathbb{R}$ une fonction continue bornée, où $\mathcal{C}([0,u])$ désigne l'espace des fonctions continues de $[0,u]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.

2. Pour $m\geq 1$ et $i\in\mathbb{Z}$, on pose $\phi_m(i)=\mathbb{P}(W_m=i)$. Justifier que pour tout entier $n\geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[F\left(\left(\frac{Z_{sn}-psn}{\sqrt{cn}}\right)_{0\leq s\leq u}\right)\middle| W_n=0\right] = \mathbb{E}\left[F\left(\left(\frac{Z_{sn}-psn}{\sqrt{cn}}\right)_{0\leq s\leq u}\right)\frac{\phi_{n-\lceil un\rceil}(-W_{\lceil un\rceil})}{\phi_n(0)}\right].$$

Pour la suite, on rappelle que le théorème local limite appliqué à la marche aléatoire $(W_n)_{n\geq 0}$ donne

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}}\left|\sqrt{m}\phi_m(i)-\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2 m}}\right| \quad \xrightarrow[m\to\infty]{} \quad 0.$$

3. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[F\left(\left(\frac{Z_{sn}-psn}{\sqrt{cn}}\right)_{0\leq s\leq u}\right)\middle| W_n=0\right] \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \mathbb{E}[F((B_s^1)_{0\leq s\leq u})].$$

On pourra appliquer le théorème de représentation de Skorokhod à la convergence (1).

4. En déduire que sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\cdot|W_n=0)$, le processus $((Z_{sn}-psn)/(\sqrt{cn}))_{0\leq s\leq 1}$ converge en loi vers $(B_s^1)_{0\leq s\leq 1}$, ou, en d'autres termes, que pour toute fonction continue bornée $G:\mathcal{C}([0,1])\to\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[G\left(\left(\frac{Z_{sn}-psn}{\sqrt{cn}}\right)_{0\leq s\leq 1}\right)\middle| W_n=0\right] \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \mathbb{E}[G((B_s^1)_{0\leq s\leq 1})]$$

Deuxième partie. Soit $(k_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que $k_n\leq n$ pour tout $n\geq 1$. On pose $p_n=k_n/n$.

5. Soit $(X'_j)_{j\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi donnée par $\mathbb{P}(X'_1=k)=\frac{1-p_n}{1-p}\mathbb{P}(X_1=k)$ pour $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{P}(X'_1=0)=p_n$. On pose $W'_n=\sum_{k=1}^n X'_k$ et $Z'_n=\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X'_k=0}$. Montrer que $(X_1,\ldots,X_n)$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\cdot|Z_n=k_n)$ a la même loi que $(X'_1,\ldots,X'_n)$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\cdot|Z'_n=k_n)$.

6. Montrer que pour tous $n \geq 1$, $i \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathbb{P}(W'_n = k, Z'_n = i) = \mathbb{P}(Z'_n = i)\,\mathbb{P}\Big(\widehat{W}_{n-i} = k\Big),$$

où $\widehat{W}_{n-i} = \widehat{X}_1 + \cdots + \widehat{X}_{n-i}$ avec $(\widehat{X}_j)_{j\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi donnée par $\mathbb{P}\Big(\widehat{X}_1 = k\Big) = \mathbb{P}(X_1 = k)/(1-p)$ pour $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{P}\Big(\widehat{X}_1 = 0\Big) = 0$.

Dans la suite, on pose $\gamma_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$ et on admettra que pour $0 < u \leq 1$, si $\gamma_n \to \infty$, alors

$$\mathbb{P}\Big(Z'_{\lceil un \rceil} = uk_n + y\gamma_n\Big) = \frac{1}{\gamma_n\sqrt{2\pi u}}\exp\left(-\frac{y^2}{2u}\right) + o(1/\gamma_n)$$

lorsque $n \to \infty$, uniformément en $y \in \mathbb{R}$ (c'est une conséquence de la formule de Stirling).

7. Sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\cdot\,|\,Z_n = k_n)$, lorsque $n \to \infty$ étudier en fonction de (k_n) la convergence en loi de $W_n/(\sigma\sqrt{n})$ puis des processus $(W_{sn}/(\sigma\sqrt{n}))_{0\leq s\leq 1}$ et $((Z_{sn} - sk_n)/\gamma_n)_{0\leq s\leq 1}$.