Cours 9 : Mesures aléatoires de Poisson, 1/2

Un des objectifs est de définir une notion de "pluie" dans un espace assez général, où les gouttes arrivent indépendamment et rarement selon une répartition décrite par une mesure μ. Lorsque μ est infinie, l'expression "un point choisi au hasard selon μ" n'a pas vraiment de sens. Mais on va pouvoir donner un sens à "une infinité de points choisis selon μ" à travers les mesures aléatoires de Poisson (on verra que les lois de Poisson apparaissent naturellement).

Plan :

1) Rappels sur les lois de Poisson
2) Mesures aléatoires de Poisson
3) Points multiples

Références : • Kingman, Poisson processes

• Last, Penrose, Lectures on the Poisson process

1) Rappels sur les lois de Poisson

Pour $\lambda \in [0,\infty]$, on dit qu'une v.a X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si

- Pour $\lambda = 0$, $X = 0$ ps
- Pour $\lambda = \infty$, $X = \infty$ ps
- Pour $0 < \lambda < \infty$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \geq 0$

On a $\mathbb{E}[e^{-uX}] = \exp(-\lambda(1-e^{-u}))$ pour $u > 0$ (avec la convention $0 \times \infty = 0$)

Les deux propriétés suivantes seront très utiles

Proposition

- [Superposition] Si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable de $[0,\infty]$ et $(X_i)_{i\in I}$ les v.a indépendantes avec $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, alors $\sum_{i\in I} X_i \sim \mathcal{P}(\sum_{i\in I}\lambda_i)$
- [ramification] Soit $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda\in[0,\infty]$. Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ des v.a i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes de X avec $\mathbb{P}(U_k = i) = p_i$ pour $i\geq 1$. Alors les v.a. $X_i = \sum_{k=1}^{X} \mathbb{1}_{U_k = i}$ pour $i\geq 1$ sont indépendantes et $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda p_i)$ (avec $0\times\infty = 0$)

La preuve, pouvant être faite en utilisant les fonctions caractéristiques est laissée en exercice.

2) Mesures aléatoires de Poisson

On se place dans le cadre assez général d'un espace mesuré $(E,\mathcal{E})$.

Déf On note $\mathcal{M}_s(E)$ l'ensemble des mesures μ sur E pouvant être écrites sous la forme $\mu = \sum_{i\in I}\mu_i$ avec I dénombrable et μ_i mesure finie.
Les éléments de $\mathcal{M}_s(E)$ sont appelés mesures s-finies

Ex Une mesure σ-finie est s-finie, mais la réciproque est fausse (prendre $\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\delta_1$). L'avantage de travailler avec $\mathcal{M}_s(E)$ est la stabilité par somme dénombrable (pas le cas des mesures σ-finies)

Remarque On peut vérifier que les théorèmes de Fubini s'appliquent pour des mesures s-finies en utilisant le théorème de convergence monotone (cf Theorem A.B dans Last & Penrose)

Déf On note $\mathcal{M}_{atom}(E)$ l'ensemble des sommes dénombrables d'atomes de la forme $\sum_{i\in I}\delta_{x_i}$ avec I dénombrable et $(x_i)_{i\in I}\in E^I$

On munit $\mathcal{M}_{atom}(E)$ de la plus petite tribu rendant mesurables les applications $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{atom}(E) & \to & \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ \mu & \mapsto & \mu(A) \end{array}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$

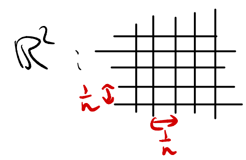
Exemples 1) $N : \Omega \to \mathcal{M}_{atom}(E)$ est une va ssi $\forall A \in \mathcal{E}, \forall k \geq 0, \{N(A) = k\}$ est mesurable

$\left(\text{car } \{N(A) = \infty\} = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{N(A) = k\} \right)^c \right)$

2) Pour $x \in E$, $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{M}_{atom}(E) \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$ est mesurable

3) Pour $A \in \mathcal{E}$, $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{atom}(E) & \to & \mathcal{M}_{atom}(E) \\ \mu & \mapsto & \mu_{|A} \end{array}$ est mesurable, où $\mu_{|A}$ est défini par $\mu_{|A}(B) = \mu(A \cap B)$ pour $B \in \mathcal{E}$

Avant de donner la définition de mesure aléatoire de Poisson, une motivation : si on veut définir une pluie "uniforme" sur $\mathbb{R}^2$, il est naturel de discrétiser $\mathbb{R}^2$:



et de choisir un point dans chaque cellule indépendamment avec probabilité $\frac{1}{n^2}$.

Alors le nombre de points qui tombent dans une région A est $\simeq \mathrm{Bin}(n^2 \mathrm{Aire}(A), \frac{1}{n^2})$ qui cv en loi vers $\mathcal{P}(\mathrm{Aire}(A))$, et le nombre de points qui tombent dans des régions disjointes sont indépendants

Définition Soit $(E, \mathcal{E})$ espace mesuré et μ s-finie sur E. Une mesure aléatoire de Poisson (ou nuage poissonien) d'intensité μ est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathcal{M}_{atom}(E)$ telle que

① $\forall A \in \mathcal{B}(E)$, $N(A) \sim \mathcal{P}(\mu(A))$

② Si $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille de parties mesurables disjointes de E, alors les va $(N(A_i))_{1 \leq i \leq k}$ sont indépendantes.

Remarques : • Presque sûrement, $N(A)=\infty \iff \mu(A)=\infty$

• si les singletons sont mesurables dans E, si $\mu(\{x\})>0$, $\mathbb{P}(N(\{x\})\geq 2)>0$.

• $\mathbb{E}[e^{-\lambda N(A)}] = e^{-\mu(A)(1-e^{-\lambda})}$

Théorème Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_s(E)$, il existe un nuage poissonien d'intensité μ, unique en loi dans $\mathcal{M}_{atom}(E)$.

Pour démontrer ce théorème, on a recours au lemme utile suivant

Lemme (Stabilité par somme)

Soit $(N_i)_{i\geq 1}$ une famille dénombrable de nuages poissoniens indépendants d'intensités μ_i. Alors $N=\sum_{i\geq 1} N_i$ est un nuage poissonien d'intensité $\mu=\sum_{i\geq 1}\mu_i$

Preuve : • Soit $A\in\mathcal{E}$. Par principe de superposition des lois de Poisson,

$N(A)\sim \mathcal{P}(\sum_{i\in I}\mu_i(A))=\mathcal{P}(\mu(A))$

• Si $(A_j)_{1\leq j\leq k}$ sont des parties mesurables disjointes, les v.a. $(N_i(A_j))_{i\geq 1, 1\leq j\leq k}$ sont indépendantes. Par regroupement par paquets, on en déduit que $\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_i(A_j)\right)_{1\leq j\leq k}$ sont indépendants

Preuve de l'existence des nuages poissoniens : d'après le lemme précédent, il suffit de traiter le cas où μ est une mesure finie.

Soit $L\sim\mathcal{P}(\mu(E))$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a iid de loi $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}$ indépendantes de L

On pose $M=\sum_{i=1}^{L}\delta_{X_i}$

Vérifions que N convient. C'est bien une v.a. (cf exemple 2 page 3)

Soit $(A_j)_{1 \leq j \leq k}$ des parties mesurables disjointes de E et posons $B = \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)^c$. On définit pour $i \geq 1$

$$U_i = \begin{cases} j & \text{si } X_i \in A_j \\ 0 & \text{si } X_i \in B \end{cases}$$

Les variables aléatoires $(U_i)_{i \geq 1}$ sont iid, donc d'après le principe de réfection pour les lois de Poisson, les v.a

$$N(A_j) = \sum_{i=1}^{L} \mathbb{1}_{X_i \in A_j} = \sum_{i=1}^{L} \mathbb{1}_{U_i = j}$$

sont indépendantes et $N(A_j) \sim \mathcal{P}\left(\mu(E) \cdot \frac{\mu(A_j)}{\mu(E)}\right) = \mathcal{P}(\mu(A_j))$.

Preuve de l'unicité en loi des nuages poissoniens

Les parties de la forme $\{\mu \in \mathcal{M}_{atom}(E) : \mu(A_1) = k_1, \dots, \mu(A_\ell) = k_\ell\}$ avec A_i mesurable et $k_i \geq 0$ forment un π-système générateur de $\mathcal{M}_{atom}(E)$.

Or une telle partie s'écrit comme union finie disjointe de parties de la forme $\{\mu \in \mathcal{M}_{atom}(E) : \mu(B_1) = j_1, \dots, \mu(B_n) = j_n\}$ $(*)$ avec (B_i) mesurables disjoints et $j_i \geq 0$. Ainsi une mesure de probabilité sur E est caractérisée par ses valeurs sur les ensembles de la forme $(*)$.

Dans le cas d'un nuage poissonien, si deux nuages poissoniens vérifient ① et ②, leurs lois sont égales sur les ensembles de la forme $(*)$, donc sont les mêmes.

Remarque La preuve précédente montre que si μ est s-finie, il existe des variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ à valeurs dans E et K à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ toutes indépendantes telles que

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{K} \delta_{X_i} \quad (*)}$$

est un nuage poissonien d'intensité μ. (avec $K=\infty$ ps si $\mu(E)=\infty$)

⚠ Les X_i n'ont en général pas la même loi

⚠ Si M est un nuage poissonien, en général il ne s'écrit pas sous la forme $(*)$ (en général, on ne peut pas énumérer les atomes de manière mesurable).

Toutefois :

Conséquence importante Si on souhaite démontrer une propriété qui ne dépend que de la loi de M, alors on peut supposer sans perte de généralité que M est de la forme $(*)$ ci-dessus, construite comme dans la preuve de l'existence de nuages poissoniens.

Exemple (un processus de Poisson est un nuage poissonien)

Soit $\lambda>0$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a iid $\mathcal{E}xp(\lambda)$. On pose $M=\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{X_1+\dots+X_k}$. Alors M est un nuage poissonien d'intensité $\lambda \mathbb{1}_{x\geq 0}\, dx$.

Preuve : D'après la propriété de sans mémoire de la loi exponentielle, les v.a $(M_{|[i,i+1[})_{i\geq 0}$ sont iid. Il suffit donc de vérifier que $M_{|[0,1[} \overset{ps}{=} M_{|[0,1]}$ est un nuage poissonien d'intensité $\lambda \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dx$.

On sait qu'un tel nuage a la loi de $\sum_{i=1}^{L} \delta_{U_i}$ avec $L \sim \mathcal{P}oi(\lambda)$ et $(U_i)_{i\geq 1}$ iid sur $[0,1]$. Vérifions que $M_{|[0,1]}$ est de cette forme.

Posons $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Alors

$$\mathbb{P}(M([0,1])=n) = \mathbb{P}(S_n \le 1, S_{n+1} > 1)$$

$$= \int_{\{x_i \ge 0\}} \prod_{i=1}^{n+1} \left(\lambda e^{-\lambda x_i} dx_i\right) \mathbb{1}_{\{x_1 + \cdots + x_n \le 1 < x_1 + \cdots + x_{n+1}\}}$$

$$\overset{[y_i = x_1 + \cdots + x_i]}{=} \int_{\{0 \le y_1 \le \cdots \le y_{n+1}\}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda y_{n+1}} \mathbb{1}_{\{y_n \le 1 < y_{n+1}\}} dy_1 \, dy_2 \cdots dy_{n+1}$$

$$= \lambda^n \int_{\{0 \le y_1 \le \cdots \le y_n \le 1\}} dy_1 \cdots dy_n \; e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} \int_{0 \le y_1, \dots, y_n \le 1} dy_1 \cdots dy_n \; e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Donc $M([0,1]) \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Déterminons la loi de $(S_1, \dots, S_n)$ sachant $M([0,1]) = n$:

$$\mathbb{E}[g(S_1, \dots, S_n) \mid M([0,1]) = n] = \frac{\int_{\{x_i \ge 0\}} \prod_{i=1}^{n+1} \left(\lambda e^{-\lambda x_i} dx_i\right) f(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \mathbb{1}_{x_1 + \cdots + x_n \le 1 < x_1 + \cdots + x_{n+1}}}{\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}$$

même type de calculs que juste avant

$$\overset{[\dots]}{=} n! \int_{0 \le y_1 < \cdots < y_n \le 1} dy_1 \cdots dy_n \, f(y_1, \dots, y_n)$$

Ainsi, $(S_1, \dots, S_n)$ sachant $M([0,1]) = n$ a la loi des statistiques d'ordre de n v.a uniformes iid sur $[0,1]$, ce qui conclut.

Proposition (Stabilité par restriction) Soit M nuage poissonien d'intensité μ. Soit $(A_i)_{i \in I}$ des parties disjointes de E. Alors $(M_{|A_i})_{i \in I}$ sont des nuages poissoniens $\perp\!\!\!\perp$ et $M_{|A_i}$ est d'intensité $\mu_{|A_i}$.

C'est une conséquence immédiate de la définition.

On en déduit le résultat suivant, important en pratique pour se ramener au cas d'une mesure d'intensité finie

Corollaire Soit M une mesure aléatoire de Poisson d'intensité μ supposée σ-finie. Alors on peut écrire $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$ avec $(M_i)_{i\geq 1}$ des mesures aléatoires de Poisson indépendantes d'intensités finies

Preuve : On écrit $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $(A_i)_{i\geq 1}$ éléments disjoints de $\mathcal{E}$ de μ-mesure finie. Alors $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_{|A_i}$, avec $(M_{|A_i})_{i\geq 1}$ des mesures aléatoires de Poisson indépendantes avec $M_{|A_i}$ d'intensité $\mu_{|A_i}$ finie.

∞

Remarque Si μ est s-finie, ce n'est pas clair qu'on peut décomposer M de manière "mesurable" $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$ avec $(M_i)_{i\geq 1}$ mesures aléatoires de Poisson indépendantes d'intensités finies. Mais lorsque μ est σ-finie, on vient de voir que c'est possible.

3) Points multiples

On suppose que $\{x\} \in \mathcal{E}$ $\forall x \in E$.

Les atomes d'une mesure $\sum_{i \in I} \delta_{x_i} \in \mathcal{M}_{atom}(E)$ ne sont pas forcément distincts.

Si M est un nuage poissonien d'intensité μ, $M(\{x\}) \sim \mathcal{P}(\mu(\{x\}))$.

Donc $\forall x \in E$, $\mu(\{x\}) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E$, $\mathbb{P}(M(\{x\}) \in \{0,1\}) = 1$. On va en fait mq $\forall x \in E, \mu(\{x\}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\forall x \in E, M(\{x\}) \in \{0,1\}) = 1$ sous de bonnes hypothèses garantissant la mesurabilité de l'événement.

Définition On note

$$\mathcal{M}_{atom}^{simple}(E) = \left\{ \mu = \sum_{i \in I} \delta_{x_i} \in \mathcal{M}_{atom}(E) : x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j \right\}$$

Rappelons que $\mathcal{M}_{atom}(E)$ est muni de la plus petite tribu pour laquelle les $\begin{array}{rcl}\mathcal{M}_{atom}(E) & \to & \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ \mu & \mapsto & \mu(A)\end{array}$ sont mesurables pour tout $A \in \mathcal{E}$.

⚠ En général, $\mathcal{M}_{atom}^{simple}(E)$ n'est pas une partie mesurable de $\mathcal{M}_{atom}(E)$.

En effet, soit $(X_i)_{i \geq 1}$ des v.a iid uniformes sur $[0,1] = E$. Posons $M_1 = \sum_{n \geq 1} \delta_{X_n}$ et $M_2 = \sum_{n \geq 1} 2\delta_{X_n}$. Alors M_1 et M_2 sont deux mesures aléatoires de Poisson d'intensité s-finie μ donnée par $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda(A) = 0 \\ \infty & \text{si } \lambda(A) = \infty \end{cases}$ avec λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. (μ est s-finie car $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda$).

M_1 et M_2 ont même loi, $M_1 \in \mathcal{M}_{atom}^{simple}(E)$ et $M_2 \notin \mathcal{M}_{atom}^{simple}(E)$, donc $\mathcal{M}_{atom}^{simple}(E)$ n'est pas mesurable

Une hypothèse de finitude et de mesurabilité sont nécessaires:

Lemme On suppose que $D=\{(x,x): x\in E\}\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$

Alors $\mathcal{M}^{\text{simple},f}_{\text{atom}}(E)=\{\mu\in\mathcal{M}^{\text{simple}}_{\text{atom}}(E): \mu(E)<\infty\}$ est mesurable dans $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$.

Preuve: Posons $\mathcal{M}^{f}_{\text{atom}}(E)=\{\mu\in\mathcal{M}_{\text{atom}}(E): \mu(E)<\infty\}$, partie mesurable de $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$

et
$$\Phi : \mathcal{M}^{f}_{\text{atom}}(E)\longrightarrow\mathcal{M}^{f}_{\text{atom}}(E\times E).$$
$$\sum_{i=1}^{m}\delta_{x_i}\longmapsto\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}\delta_{(x_i,x_j)}$$

Puisque $\mathcal{M}^{\text{simple},f}_{\text{atom}}(E)=\{\mu\in\mathcal{M}^{f}_{\text{atom}}(E) : \Phi(\mu)(D)=0\}$, il suffit de vérifier que $\mu\longmapsto\Phi(\mu)(D)$ est mesurable. Pour cela, considérons
$$\mathcal{C}=\{C\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E} : \begin{cases}\mathcal{M}^{f}_{\text{atom}}(E)\to\mathbb{R}\\ \mu\longmapsto\Phi(\mu)(C)\end{cases}\text{ est mesurable}\}.$$

Puisque pour μ finie et $A, B\in\mathcal{E}$, on a $\Phi(\mu)(A\times B)=\mu(A)\mu(B)-\mu(A\cap B)$.

On vérifie que $\mathcal{C}$ est une classe monotone, contenant les pavés mesurables.

Ceci conclut. (N.B. On peut de même montrer que Φ est mesurable)

~

Proposition On suppose que μ est σ-finie et que $D=\{(x,x): x\in E\}\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$

Soit M un nuage poissonien d'intensité μ. Alors

$\forall x\in E\ \ \mu(\{x\})=0 \iff$ p.s $M\in\mathcal{M}^{\text{simple}}_{\text{atom}}(E)$ (c'est-à-dire qu'il existe un événement A tq $\mathbb{P}(A)=1$ et $\omega\in A\Rightarrow M(\omega)\in\mathcal{M}^{\text{simple}}_{\text{atom}}(E)$)

Si $\mathbb{P}$ est complète (càd que tout sous-ensemble d'un événement de proba nulle est mesurable), c'est donc $\iff\mathbb{P}(M\in\mathcal{M}^{\text{simple}}_{\text{atom}}(E))=1$

Le cas échéant, on dit que M est sans point multiple

⚠ On rappelle qu'en général $\mathcal{M}^{\text{simple}}_{\text{atom}}(E)$ n'est pas mesurable dans E.

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mu(\{x\}) = c > 0$ pour un $x \in E$. Alors

$\mathbb{P}(M(\{x\}) \geq 2) = 1 - e^{-c} - c\, e^{-c} > 0$, donc $\mathbb{P}(M \notin \mathcal{M}^{simple}_{atom}(E)) > 0$,

absurde

$\boxed{\Rightarrow}$ • Traitons d'abord le cas μ fini. Alors d'après le lemme $\mathbb{P}(M \in \mathcal{M}^{simple, f}_{atom}(E))$ ne dépend que de la loi de M. Ainsi, on peut supposer que M est construite à partir de variables aléatoires comme dans la preuve de l'existence des nuages poissoniens : $M = \sum_{i=1}^{L} \delta_{X_i}$ avec $L \sim \mathcal{P}(\mu(E))$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d de loi $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}$, $\perp\!\!\!\perp$ de L.

Alors pour $1 \leq i \neq j$, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = \frac{1}{\mu(E)^2} \iint_{E^2} \mathbb{1}_{x=y}\, \mu(dx)\, \mu(dy) = 0$.

Donc $\mathbb{P}(M \in \mathcal{M}^{simple, f}_{atom}(E)) = 1$.

• Dans le cas général σ-fini $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = E$ avec $(A_i)_{i \geq 1}$ disjoints et $\mu(A_i) < \infty$ $\forall i \geq 1$, on a vu que $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_{|A_i}$, où $(M_{|A_i})_{i \geq 1}$ sont des nuages poissoniens indépendants d'intensités respectives $\mu_{|A_i}$ (et donc finies).

Soit alors $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{ M_{|A_i} \in \mathcal{M}^{simple, f}_{atom}(E) \}$

ainsi d'après le cas μ fini on a $\mathbb{P}(A) = 1$.

De plus $\omega \in A \Rightarrow M(\omega) \in \mathcal{M}^{simple}_{atom}(E)$.

$\sim$