Cours 10 : Mesures aléatoires de Poisson, 2/2

Rappelons le cadre : ici, $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$ désigneront deux espaces mesurés tels que $\forall x \in E, \{x\} \in \mathcal{E}$ et $\forall y \in F, \{y\} \in \mathcal{F}$.

- $\mathcal{M}_{atom}(E) = \{\mu$ mesure de la forme $\sum_{i\in I} \delta_{x_i}$ avec I au plus dénombrable et $x_i \in E\ \forall i \in I\}$ muni de la plus petite tribu pour laquelle les $\begin{array}{l} \mathcal{M}_{atom}(E) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ \mu \mapsto \mu(A) \end{array}$ sont mesurables pour tout $A \in \mathcal{E}$.

- μ est s-finie si $\mu = \sum_{i\in I} \mu_i$ avec I au plus dénombrable et μ_i finie $\forall i \in I$.
- Une mesure aléatoire de poisson d'intensité $\mu \in \mathcal{M}_s(E)$ est une variable aléatoire M à valeurs dans $\mathcal{M}_{atom}(E)$ telle que :
  - $\forall A \in \mathcal{E}$, $M(A) \sim \mathcal{P}(\mu(A))$
  - $\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$, $M(A_1), \dots, M(A_k)$ sont indépendants.

Plan :
1) Formules de Cambell
2) Transformations de nuages poissoniens
3) Nuages de Poisson avec paramètre temporel.
4) Formule de Palm

Commençons d'abord avec une remarque concernant l'énumération des atomes.

Remarque facultative • Il n'est pas toujours possible d'énumérer les atomes de $\mu \in \mathcal{M}_{atom}(E)$ de manière mesurable.

En effet, soit $E=[0,1]$ et supposons par l'absurde qu'il existe des applications mesurables $\pi_i : \mathcal{M}_{atom}(E) \to E$ et $L : \mathcal{M}_{atom}(E) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{atom}(E), \quad \mu = \sum_{i=1}^{L(\mu)} \delta_{\pi_i(\mu)}$$

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda \in \mathcal{M}_s([0,1])$.

Ainsi $\mu(A)=0$ si $\lambda(A)=0$ et $\mu(A)=\infty$ si $\lambda(A)>0$.

Soit M un nuage poissonien d'intensité μ. Ainsi, $\forall A \in \mathcal{B}([0,1])$ ps $M(A)=0$ ou ∞. Ainsi $2M \overset{loi}{=} M$ et on vérifie que $M \perp\!\!\!\perp M$. Alors

$(\pi_i(2M))_{i\geq 1} \perp\!\!\!\perp (\pi_i(2M))_{i\geq 1}$

Puisque μ est sans atome, $\forall i \geq 1$, $\forall x \in [0,1]$, $\mathbb{P}(\pi_i(2M)=x)=0$.

Par Fubini, $\forall i \neq j$, $\mathbb{P}(\pi_i(2M) = \pi_j(2M)) = 0$.

Donc $\mathbb{P}(\forall i \neq j, \pi_i(2M) \neq \pi_j(2M)) = 1$, absurde.

$\rightsquigarrow$ il faut des hypothèses additionnelles de "finitude"

• Si E est un sous-ensemble mesurable d'un espace métrique polonais, en notant $\mathcal{M}_{atom}^{<\infty}(E)$ les mesures finies de $\mathcal{M}_{atom}(E)$, il est possible de numéroter de manière mesurable les atomes des mesures de $\mathcal{M}_{atom}^{<\infty}(E)$ (Proposition 6.2 dans Last & Penrose)

On en déduit que si M est un nuage poissonien d'intensité μ σ-finie sur E polonais, alors on peut écrire

$$M = \sum_{i=1}^{L(M)} \delta_{\pi_i(M)}$$ avec L, π_i mesurables.

(cf Corollary 6.5 dans Last & Penrose)

1) Formules de Campbell (additive, exponentielle)

Dans toute cette partie, $\mu \in \mathcal{M}_s(E)$ est fixée et M est un nuage poissonien d'intensité μ, avec un espace mesuré $(E, \mathcal{E})$ quelconque

Théorème (formule additive)

1) (cas positif) Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Alors la v.a $M(f) = \int_E f(x) M(dx)$ a pour espérance $\mathbb{E}[M(f)] = \int_E f(x) \mu(dx)$

2) (cas intégrable) Soit $f : E \to \mathbb{R}$, μ-intégrable. Alors la v.a $M(f) = \int_E f(x) M(dx)$ est intégrable, et $\mathbb{E}[M(f)] = \int f(x) \mu(dx)$

Preuve 1) On écrit $f \geq 0$ comme limite croissante de fonctions étagées $f_n = \sum_{i=1}^{N_n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$

En particulier $\mathbb{E}[M(f_n)] = \sum_{i=1}^{N_n} c_i \, \mu(A_i) = \mu(f_n)$.

Puis, $M(f_n) \uparrow M(f)$. Donc $M(f)$ est mesurable et par convergence monotone $\mathbb{E}[M(f)] = \mu(f)$

2) On écrit $f = f^+ - f^-$ et on applique 1) avec f^+ et f^-

$\backsim$

Théorème (formule exponentielle)

1) (cas positif) Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable. On a

$$\mathbb{E}\left[e^{-M(f)} \right] = \exp\left(- \int_E \mu(dx) \left(1 - e^{-f(x)} \right) \right).$$

2) (cas intégrable) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ μ-intégrable. On a

$$\mathbb{E}\left[e^{iM(f)} \right] = \exp\left(\int_E \mu(dx) \left(e^{if(x)} - 1 \right) \right)$$

Preuve : 1) On écrit $f \geq 0$ comme limite croissante de fonctions étagées $f_n = \sum_{i=1}^{N_n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $(A_i)_{i\geq 1}$ disjoints. Alors $M(f_n) = \sum_{i=1}^{N_n} c_i N(A_i)$ est une combinaison linéaire de v.a de Poisson $\perp\!\!\!\perp$, et on conclut en utilisant la forme de la transfo de Laplace d'une v.a de Poisson et convergence monotone.

2) On écrit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ avec $f = f^+ - f^-$, $f_n = f_n^+ - f_n^-$, $0 \leq f_n^+ \uparrow f^+$, $0 \leq f_n^- \uparrow f^-$ et f_n^+, f_n^- étagées. Comme en 1), un calcul explicite donne

$$\mathbb{E}[e^{iM(f_n)}] = \exp\left(\int_E \mu(dx)\left(e^{if_n(x)} - 1\right)\right).$$

Mais d'une part, $\exp\left(\int_E \mu(dx)\left(e^{if_n(x)}-1\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(\int_E \mu(dx)\left(e^{if(x)}-1\right)\right)$ par convergence dominée, en utilisant $|e^{if_n(x)} - 1| \leq |f_n(x)| = f_n^+ + f_n^- \leq f^+ + f^- = |f|$.

D'autre part, $M(f_n) = M(f_n^+) - M(f_n^-)$, et $M(f_n^+) \nearrow M(f^+)$ et $M(f_n^-) \nearrow M(f^-)$ par convergence monotone. Donc $M(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M(f)$.

Comme $|e^{iM(f_n)}| = 1$, on a aussi $\mathbb{E}[e^{iM(f_n)}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[e^{iM(f)}]$ par convergence dominée, ce qui conclut.

~

Remarque importante La formule exponentielle permet une caractérisation "à la Laplace" des mesures de Poisson : si N est une v.a à valeurs dans $\mathcal{M}_{atom}(E)$ telle que $\mathbb{E}[e^{-N(f)}] = \exp\left(-\int_E \mu(dx)(1 - e^{-f(x)})\right)$ pour $f \geq 0$ ou $\mathbb{E}[e^{iN(f)}] = \exp\left(\int_E \mu(dx)(e^{if(x)} - 1)\right)$ pour $f : E \to \mathbb{R}$ μ intégrable, alors N est un nuage poissonien d'intensité μ

(prendre simplement $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ disjoints)

Pour $f: E \to \mathbb{R}_+$ mesurable, d'après la formule additive $\mathbb{E}[\int f(x)\, M(dx)] < \infty \iff \int f\, d\mu < \infty$

Le résultat suivant donne une CNS pour $\int f(x)\, M(dx) < \infty$ p.s

Proposition Soit $f: E \to \mathbb{R}_+$ mesurable. On a l'alternative :

ⓐ Si $\int_E \min(1, f)\, d\mu < \infty$, alors p.s. $\int_E f(x)\, M(dx) < \infty$

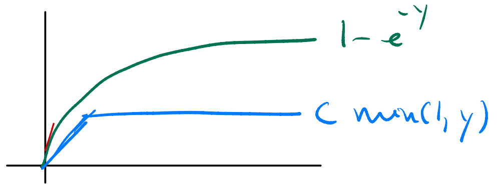
ⓑ Si $\int_E \min(1, f)\, d\mu = \infty$, alors p.s. $\int_E f(x)\, M(dx) = \infty$

Preuve : On remarque que pour $x \in [0, \infty]$, $x < \infty \iff \lim_{\lambda \to 0} e^{-\lambda x} = 1$

Ainsi, $$\mathbb{P}\left(\int f(x)\, M(dx) < \infty\right) = \lim_{\lambda \to 0} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda M(f)}\right]$$
$$= \lim_{\lambda \to 0} \exp\left(-\int \mu(dx)\left(1 - e^{-\lambda f(x)}\right)\right) \quad \text{(formule expo)}$$

① Si $\int_E \min(1, f)\, d\mu < \infty$, pour $\lambda \leq 1$ on a $1 - e^{-\lambda f(x)} \leq \min(1, f)$ et le résultat s'ensuit par convergence dominée

② Si $\int_E \min(1, f)\, d\mu = \infty$, on remarque que $C \min(1, y) \leq 1 - e^{-y}$



pour une certaine constante C ($= 1 - e^{-1}$)

Ainsi, pour $\lambda < 1$, $\int \mu(dx)\left(1 - e^{-\lambda f(x)}\right) \geq C \int \mu(dx) \min(1, \lambda x) \geq \lambda C \int \mu(dx) \min(1, x) = \infty$

Donc $\mathbb{P}\left(\int f(x)\, M(dx) < \infty\right) = 0$

~

Exemple Si $\mu = \frac{1}{x^{3/2}} \mathbb{1}_{x>0}\, dx$ et $f(x) = x$, alors $M(f) < \infty$ p.s

mais $\mathbb{E}[M(f)] = \infty$

2) Transformations de nuages poissoniens

Proposition (stabilité par image)

Soit M un nuage poissonien d'intensité μ s-finie sur $(E, \mathcal{E})$ et $f : (E,\mathcal{E}) \to (F,\mathcal{F})$ mesurable. Alors $f_*(M)$ est un nuage Poissonien d'intensité $f_*\mu$ sur F

Preuve : Tout d'abord vérifions que f_* est $\mathcal{M}_{atom}(E) \to \mathcal{M}_{atom}(F)$ et $\sum_{i\in I} \delta_{x_i} \mapsto \sum_{i\in I} \delta_{f(x_i)}$ qu'elle est mesurable.

- Pour $B \in \mathcal{F}$, on a bien $\left(\sum_{i\in I} \delta_{f(x_i)}\right)(B) = \#\{i \in I : x_i \in f^{-1}(B)\} = \left(\sum_{i\in I}\delta_{x_i}\right)(f^{-1}(B))$
- On a pour $B \in \mathcal{F}$, $k \geq 0$:

$$f_*^{-1}\left(\{\nu \in \mathcal{M}_{atom}(F) : \nu(B) = k\}\right) = \{\mu \in \mathcal{M}_{atom}(E) : f_*\mu(B) = k\}$$
$$= \{\mu \in \mathcal{M}_{atom}(E) : \mu(f^{-1}(B)) = k\},$$

mesurable

Ainsi, $f_*(M) \in \mathcal{M}_{atom}(F)$, et si $B \in \mathcal{F}$,

$$f_*(M)(B) = M(f^{-1}(B)) \sim \mathcal{P}(\mu(f^{-1}(B))) \sim \mathcal{P}(f_*\mu)$$

Par ailleurs, si $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{F}$ sont disjoints, $f^{-1}(B_1), \dots, f^{-1}(B_k)$ sont disjoints donc les $f_*(M)(B_i) = M(f^{-1}(B_i))$ sont $\perp\!\!\!\perp$.

$\sim$

Remarque Un autre avantage de travailler avec des mesures s-finies ici plutôt que σ-finies est que l'image d'une mesure σ-finie n'est en général pas σ-finie

Proposition (stabilité par marquage)

On suppose que $M = \sum_{k=1}^{L} \delta_{X_k}$ avec $L \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $X_k \in E$ des variables aléatoires est un nuage poissonien d'intensité $\mu \in \mathcal{M}_s(E)$.

Soit $(Y_i)_{i \geq 1}$ des v.a iid dans $(F, \mathcal{F})$ de loi μ', indépendantes de $(L, X_1, X_2, \dots)$

Alors $\tilde{M} = \sum_{k=1}^{L} \delta_{(X_k, Y_k)}$ est un nuage poissonien dans $E \times F$ d'intensité $\mu \otimes \mu'$

Preuve : Soit $f : E \times F \to \mathbb{R}_+$ mesurable. On calcule :

$$\mathbb{E}[\exp(-\tilde{M}(f))] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\sum_{k=1}^{L} f(X_k, Y_k)\Big) \,\Big|\, L, (X_k)_{k \geq 1}\Big]\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{L} \int_F \mu'(dy) \exp(-f(X_k, y))\Big]$$

$$= \mathbb{E}[\exp(-M(F))]$$

avec $F(x) = -\ln \int_F \mu'(dy)\, e^{-f(x,y)} \geq 0$.

Donc d'après la formule exponentielle

$$\mathbb{E}[\exp(-\tilde{M}(f))] = \exp\Big(-\int_E (1 - e^{-F(x)})\, \mu(dx)\Big)$$

$$= \exp\Big(-\int_{E \times F} (1 - e^{-f(x,y)})\, \mu \otimes \mu'(dx\, dy)\Big).$$

D'où le résultat

~

Exemple Soit $M = \sum_{k=1}^{L} \delta_{X_k}$ nuage poissonien d'intensité μ sur E et $(Y_i)_{i \geq 1}$ iid $\perp\!\!\!\perp$ Bernoulli(p). Alors $M_p = \sum_{k=1}^{L} Y_k \delta_{X_k}$ est un nuage poissonien d'intensité $p\mu$, car M_p est la restriction à $E \times \{1\}$ de $\tilde{M} = \sum_{k=1}^{L} \delta_{(X_k, Y_k)}$ d'intensité $\mu \otimes$ Bernoulli(p)

3) Nuages de Poisson avec paramètre temporel

On se place dans le cadre d'un espace mesuré $(E, \mathcal{E})$ avec $\{x\} \in \mathcal{E}$ $\forall x \in E$, on suppose que $\mathbb{P}$ est complète et que μ est σ-finie sur E.

Déf Un processus ponctuel de Poisson sur E d'intensité μ est un nuage poissonien M sur $\mathbb{R}_+ \times E$ d'intensité $dt \otimes \mu$

Proposition Presque sûrement, $\forall t \geq 0$ $M(\{t\} \times E) \leq 1$

Preuve : On mq $\forall T > 0$, $A_T = \{\exists t \in [0,T], M(\{t\} \times E) \geq 2\}$ est inclus dans un événement négligeable. Par σ-finitude, il suffit de le faire pour μ finie.

En effet, en écrivant $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $A_i \in \mathcal{E}$ disjoints et $\mu(A_i) < \infty$, on a

$$A_T = \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \{\exists t \in [0,T], M(\{t\} \times (A_i \cup A_j)) \geq 2\}$$

Comme $\mu(A_i \cup A_j) < \infty$, il suffit de traiter le cas μ finie.

Supposons donc μ finie

Pour $T > 0$: $A_T \subset B_{T,n}$ avec $B_{T,n} = \{\exists 1 \leq k \leq n, M([\frac{k-1}{n}T, \frac{k}{n}T] \times E) \geq 2\}$.

Or $\mathbb{P}(B_{T,n}) \leq \sum_{k=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_n}(1+\lambda_n))$ avec $\lambda_n = \frac{\mu(E)T}{n}$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_n^2 = \frac{(\mu(E)T)^2}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $A_T \subset \bigcap_{n \geq 1} B_{T,n}$ avec $\mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 1} B_{T,n}) = 0$.

Déf Pour $t \geq 0$, on pose $e(t) = \begin{cases} x & \text{si } M(\{(t,x)\}) = 1 \\ \partial & \text{point cimetière sinon} \end{cases}$

Proposition 1) $\forall t \geq 0$, $e(t)$ est une v.a.

2) Si $\mu(E) = \infty$, $\{t : e(t) \neq \partial\}$ est dense p-s

3) Si $0 < \mu(E) < \infty$, p.s $\{t : e(t) \neq \partial\}$ est infini discret et peut être ordonné avec des v.a $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ qui vérifient

ⓐ $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ sont i.i.d $\exp(\mu(E))$

ⓑ les v.a $(e(T_i))_{i \geq 1}$ sont i.i.d de loi $\mu(\cdot)/\mu(E)$

ⓒ $(e(T_i))_{i \geq 1} \perp\!\!\!\perp (T_i)_{i \geq 1}$

Preuve : 1) Pour $A \in \mathcal{E}$, $\{e(t) \in A\} = \{M(\{t\} \times A) = 1\}$
$\{e(t) = \partial\} = \{M(\{t\} \times E) = 0\}$

2) Si $\mu(E) = \infty$ $\forall a < b \in \mathbb{Q}_+$ on a $M([a,b] \times E) \sim \mathrm{Poi}(\infty) = \infty$ p.s.

3) La loi de $(T_i, e(T_j))_{i,j \geq 1}$ ne dépend que de la loi de M, par exemple
$T_1 = \inf\{t \geq 0 : M([0,t] \times E) \geq 1\}$ et $\{e(T_1) \in A\} = \{M(\{T_1\} \times A) = 1\}$.
La prop à démontrer ne dépend donc que de la loi de M.

Construisons alors M comme suit.

Soit $P = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{T_i}$ un nuage poissonien d'intensité $\mu(E)\,dt$ sur $\mathbb{R}_+$ et $(Y_i)_{i \geq 1}$ i.i.d $\sim \mu(\cdot)/\mu(E)$. Alors, par marquage,
$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(T_i, Y_i)}$$
est un nuage poissonien d'intensité $dt \otimes \mu$. Par ailleurs, on a vu au cours dernier que $(P([0,t]))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\mu(E)$ et on peut bien ordonner $T_1 < T_2 < \cdots$ qui vérifient ⓐ.

Les propriétés ⓑ et ⓒ découlent du fait que $e(T_i) = Y_i$.

~

Exemple Prenons $\mu = \frac{1}{x^{3/2}} \mathbb{1}_{x>0} dx$ sur $E = \mathbb{R}_+^*$. On a $\mu(E) = \infty$

Pour $t \geq 0$ on pose $X_t = \sum_{s \leq t} e(s) \mathbb{1}_{e(s) \neq \partial} = M(f_t)$

avec $f_t(s,x) = x \mathbb{1}_{s \leq t}$

Comme $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*} ds \otimes \mu(dx)\, 1 \wedge f_t(s,x) < \infty$, $\forall t \geq 0$, p-s $X_t < \infty$, et par monotonie p-s $\forall t \geq 0$ $X_t < \infty$.

Néanmoins, comme $\forall t \geq 0$ $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*} ds \otimes \mu(dx)\, f_t(s,x) = \infty$ on a $\mathbb{E}[X_t] = \infty$

En utilisant les propriétés des mesures aléatoires de Poisson, on peut vérifier que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires et indépendants, et il est càdlàg par construction : c'est un processus de Lévy croissant (un subordinateur)

4) Formule de Palm

Théorème (Formule de Palm / équation de Mecke) Soit μ σ-finie et M un nuage poissonien d'intensité μ. Soit $f : E \times \mathcal{M}_{atom}(E) \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Alors

$$\mathbb{E}\left[\int f(x,M) M(dx)\right] = \int_E \mathbb{E}[f(x, M+\delta_x)] \mu(dx) \quad (\wp)$$

On peut intuitivement interpréter la formule de Palm comme suit : sachant que M a un atome en x, ce qui advient avec intensité $\mu(dx)$, la mesure M a même loi que $M+\delta_x$, i.e la mesure de Poisson à laquelle on a rajouté un atome en x

On peut voir ce résultat comme une extension de la formule additive prenant en compte les atomes.

Preuve : Tout d'abord, comme $\mu \mapsto \mu + \delta_x$ est mesurable, par approximation par des fonctions étagées, on vérifie que $\mu \mapsto \int f(x,\mu) \, (dx)$ et $\mu \mapsto f(x, \mu + \delta_x)$ sont mesurables. Ainsi $(*)$ ne dépend que de la loi de M.

Étape 1 : μ finie.

On écrit M sous la forme $M = \sum_{i=1}^{L} \delta_{X_i}$ avec $L \sim \mathrm{Poi}(\mu(E))$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ iid de loi $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}$ indépendants de L. Alors

$$\mathbb{E}\left[\int f(x,M) M(dx)\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(E)^k}{k!} e^{-\mu(E)} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} f(X_i, \sum_{j=1}^{k} \delta_{X_j})\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(E)^k}{k!} e^{-\mu(E)} k \cdot \mathbb{E}\left[f(X_k, \sum_{j=1}^{k} \delta_{X_j})\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(E)^k}{k!} e^{-\mu(E)} \cdot k \cdot \int_E \frac{\mu(dx)}{\mu(E)} \mathbb{E}\left[f(x, \sum_{j=1}^{k-1} \delta_{X_j} + \delta_x)\right]$$

$$= \int_E \mu(dx) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(E)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu(E)} \mathbb{E}\left[f(x, \sum_{j=1}^{k-1} \delta_{X_j} + \delta_x)\right]\right)$$

$$= \int_E \mu(dx) \, \mathbb{E}[f(x, M + \delta_x)]$$

Étape 2 : Écrivons $M = \sum_{i \geq 1} M_i$ avec M_i nuages poissoniens indépendants d'intensités μ_i finies. Pour $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$, $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} M_i$ et $s_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

Par convergence monotone,

$$\mathbb{E}\left[\int f(x,M) M(dx)\right] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\int f(x, S_n + R_n) S_n(dx)\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\int F(x, S_n) S_n(dx)\right]$$

avec $F(x,\mu) = \mathbb{E}[f(x, \mu + R_n)]$ car $S_n \perp\!\!\!\perp R_n$

Puisque S_n est d'intensité finie,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int F(x, S_n)\, S_n(dx)\right] &= \int_E \mathbb{E}\left[F(x, S_n+\delta_x)\right] S_n(dx) \\
&= \int_E \mathbb{E}\left[f(x, M+\delta_x)\right] S_n(dx) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E \mathbb{E}\left[f(x, M+\delta_x)\right] \mu(dx)
\end{aligned}
$$

Remarque Si les atomes de M peuvent être énumérés de manière mesurable (c'est le cas si μ est σ-finie et E polonais), la formule de Palm peut s'écrire

$$\mathbb{E}\left[\int f(x, M-\delta_x)\, M(dx)\right] = \int_E \mathbb{E}\left[f(x, M)\right] \mu(dx)$$