Notations :

- (E,d) espace métrique
- $\mathcal{B}_E$ ou $\mathcal{B}$ tribu borélienne (+ petite qui contient les ouverts)
- $\mathcal{M}_1(E)$: mesures de proba sur E
- Si $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable ≥ 0 ou μ-intégrable, on note

$$\boxed{\mu(f) = \langle \mu, f \rangle = \int_E f \, d\mu}$$

- $\mathcal{C}_b(E)$: fonctions continues bornées $E \to \mathbb{R}$
- $\mathcal{C}_c(E)$: fonctions continues $E \to \mathbb{R}$ à support compact

Références :

- P. Billingsley, Convergence of probability measures (2nd ed)
- O. Kallenberg, Foundations of modern probability (2nd ed)
- J. Kingman, Poisson processes
  G. Last, M. Penrose, Lectures on the Poisson process

Cours 1 : Convergence étroite dans $\mathbb{R}^k$

Plan : 1) Définition

2) Restriction des fonctions test

3) Fonctions de répartition, tension ($k=1$)

1) Définition

Définition Soit (E,d) un espace métrique, $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(E)$. On dit que (μ_n) converge étroitement vers μ si

$$\forall f \in C_b(E), \quad \mu_n(f) \longrightarrow \mu(f).$$

On note alors $\mu_n \Rightarrow \mu$

Exemples
- Si $x_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}^k$, alors $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$
- $\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \delta_{i/n} \Rightarrow \text{Lebesgue}([0,1])$

Formulation probabiliste Si X_n, X sont des v.a de lois respectives μ_n, μ, on dit que

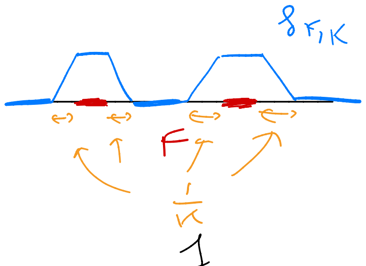
$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \text{ si } \mu_n \Rightarrow \mu, \text{ i.e } \forall f \in C_b(E), \ \mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)].$$

Proposition Soit (E,d) un espace métrique, $\mu_n, \mu, \nu \in \mathcal{M}_1(E)$. Si $\mu_n \Rightarrow \mu$ et $\nu_n \Rightarrow \mu$, alors $\mu = \nu$

Preuve : On a alors $\forall f \in C_b(E), \ \mu(f) = \nu(f)$

Soit F fermé et $K>0$. On pose

$$f_{F,K}(x) = \max(1 - K\,d(x,F), 0)$$



Comme $g_{F,\varepsilon}$ converge simplement vers 1_F, par convergence dominée, on en déduit que $\mu(F)=\nu(F)$, et donc $\mu=\nu$ par le théorème des classes monotones

~

Dans la suite de ce cours 1, on se restreint à $\mathbb{R}^k$, muni de la distance euclidienne.

2) Restriction des fonctions test

Théorème ("petit porte-manteau") Soit $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$. On a :

$\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi $\forall f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$, mesurable, bornée, continue μ presque partout (i.e $\mu(\{x\in\mathbb{R}^k : f \text{ continue en } x\})=1$) on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$

Voir Cours 2 pour une preuve d'un énoncé plus général dans un cadre plus général.

Proposition Soit $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$. Soit $H \subset \{$fonctions $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mesurables bornées$\}$ tq $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k) \subset \overline{H}$, l'adhérence étant prise pour la norme uniforme. Alors

$$\forall f \in H,\ \mu_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(f) \quad \text{implique} \quad \mu_n \Rightarrow \mu$$

Preuve : Étape 1 : On mq $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k)$ $\mu_n(f) \to \mu(f)$ implique $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Idée : argument de troncature. Soit $\gamma_r : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ continue tq $\gamma_r(x)=1$ pour $\|x\|\le r$, $\gamma_r(x)=0$ pour $\|x\|\ge r+1$

Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Alors

$$|\mu_n(f)-\mu(f)| \le |\mu_n(f)-\mu_n(f\gamma_r)| + |\mu_n(f\gamma_r)-\mu(f\gamma_r)| + \underbrace{|\mu(f\gamma_r)-\mu(f)|}_{\le \|f\|_\infty(1-\mu(\gamma_r))}$$

Quand $n\to\infty$: limsup 1er terme $\le \|f\|_\infty(1-\mu(\gamma_r))$

limsup 2è terme $=0$

Ainsi $\limsup_{n\to\infty} |\mu_n(f)-\mu(f)| \le 2\|f\|_\infty (1-\mu(\gamma_r))$

Comme $\mu(\gamma_r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 1$ (par convergence dominée), cela conclut l'étape 1.

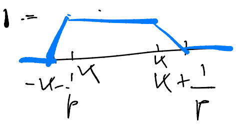
__Étape 2__ Soit $f\in \mathcal{C}(\mathbb{R}^k)$. Soit $g\in H$ tq $\|f-g\|_\infty \le \varepsilon$. Alors

$$|\mu_n(f)-\mu(f)| \le \underbrace{|\mu_n(f)-\mu_n(g)|}_{\le\varepsilon} + \underbrace{|\mu_n(g)-\mu(g)|}_{\xrightarrow[\text{car } g\in H]{} 0} + \underbrace{|\mu(g)-\mu(f)|}_{\le \varepsilon}$$

Donc $\mu_n(f)\to\mu(f)$. On conclut par l'étape 1.

__Application :__ Soit $\mu\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a iid de loi μ. Soit $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$. Alors p.s $\mu_n \Rightarrow \mu$. En particulier, toute proba de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est limite étroite de mesures atomiques

__Preuve__ Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dense dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$,
prendre par exemple les polynômes à coefficients rationnels × fonction plateau $T_{K,p}$ avec : $K,p\in\mathbb{N}$



On pose $H=\{f_k : k\geq 1\}$

Comme $\mu_n(f_k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_k(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}[f_k(X_1)] = \mu(f_k)$ d'après la loi des grands nombres

Donc p.s $\forall f\in H$, $\mu_n(f)\to\mu(f)$, d'où le résultat par la prop

3) Fonctions de répartition (k=1) et tension

__Définition__ Si $\mu\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on note $F_\mu(x)=\mu(]-\infty,x])$ pour $x\in\mathbb{R}$ sa fonction de répartition

Remarques : • $\lim_{+\infty} F_\mu = 1$, $\lim_{-\infty} F_\mu = 0$, F_μ est croissante, càdlàg (continue à droite avec des limites à gauche en tout point).

• Réciproquement, si $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ est croissante, continue à droite et vérifie $\lim_{-\infty} F = 0$, $\lim_{+\infty} F = 1$, alors $\exists \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tq $F = F_\mu$. En effet, on peut prendre pour μ l'image de la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$ par

$$x \to \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq x\}$$

(c'est la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à F, cf feuille d'exercices)

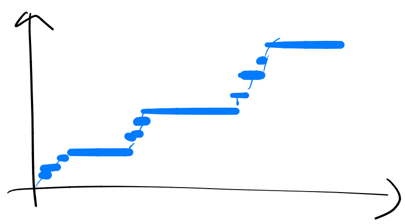
• μ a un atome en $x \iff \Delta F_\mu(x) = F_\mu(x) - F_\mu(x-) = \mu(\{x\}) > 0$

• μ a un nombre dénombrable d'atomes (car $\forall k \geq 1$, $\#\{x \in \mathbb{R},\ \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{k}\} \leq k$)

• μ n'a pas d'atome $\iff F_\mu$ est continue

• μ a une densité g (% Lebesgue) $\Rightarrow F_\mu$ est dérivable presque partout de dérivée g et $F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$.

⚠ F_μ est toujours presque partout dérivable, mais n'est pas toujours l'intégrale de sa dérivée (c'est en fait le cas ssi $\mu \ll$ mesure de Lebesgue), prendre l'escalier du diable / Cantor :
(dérivée $= 0$ presque partout)



Proposition Soit $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

$\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi $F_{\mu_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_\mu(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $\Delta F_\mu(x) = 0$

Preuve : • Si $\mu_n \Rightarrow \mu$ et si $\Delta F_\mu(a)=0$, alors $f(z) = \mathbb{1}_{z \leq x}$ est continue μ-presque partout, et donc par petit porte-manteau,

$$\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$$

• Réciproquement, on a alors $\mu_n(g) \longrightarrow \mu(g)$ pour toute fonction g de la forme $g = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbb{1}_{]x_i, y_i]}$ avec x_i et y_i des non-atomes de μ. Or toute fonction de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est limite uniforme de telles fonctions. On conclut avec la proposition de 2).

~

Définition On dit qu'une famille $(\mu_i)_{i\in I}$ de mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est tendue si $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \sup_{i \in I} \mu_i(\mathbb{R} \setminus [-A, A]) \leq \varepsilon$

Remarque Une suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est tendue ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R} \setminus [-A, A]) \leq \varepsilon .$$

Ceci provient du fait qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est tendue puisque $\lim_{A\to\infty} \mu(\mathbb{R} \setminus [-A, A]) = 0$

Le résultat suivant est un résultat de type "compacité" et est un cas particulier du théorème de Prokhorov, qui sera vu au Cours 3.

Théorème Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Alors $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue $\iff$ $\forall$ extraction φ, $\exists$ extraction ψ tq $(\mu_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ converge étroitement

(par extraction, on veut dire sous-suite, ou, plus formellement, une injection croissante $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$)

Preuve $\boxed{\Leftarrow}$ Par l'absurde, on suppose $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall n \geq 1$,
$\mu_{\phi(n)}(\mathbb{R}\setminus[-n,n]) > \varepsilon$ (on peut prendre ϕ croissante car à $i\geq 1$ fixé $\lim_{n\to\infty} \mu_i(\mathbb{R}\setminus[-n,n]) = 0$)

Par hypothèse, soit ψ extraction tq $(\mu_{\phi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ converge étroitement vers $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Alors pour tout $x > 0$ tq $\mu(\{x\}) = \mu(\{-x\}) = 0$, pour n assez grand, $[-x,x] \subset [-\psi(n),\psi(n)]$. Donc

$$\mu([-x,x]) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\phi\circ\psi(n)}([-x,x]) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{\phi\circ\psi(n)}([-\psi(n),\psi(n)]) \leq 1-\varepsilon.$$

En faisant $x \to \infty$, on obtient $\mu(\mathbb{R}) < 1$, absurde.

$\boxed{\Rightarrow}$ Quitte à travailler avec $\mu_{\phi(n)}$, on suppose ϕ = identité

Étape 1 : identifier une limite potentielle. On pose $F_n = F_{\mu_n}$
$\forall q \in \mathbb{Q}$, $(F_n(q))_{n\geq 1}$ est borné. Par argument diagonal, $\exists \psi$ extraction tq $\forall q \in \mathbb{Q}$, $(F_{\psi(n)}(q))_{n\geq 1}$ converge vers une limite notée $F_\infty(q)$. On pose alors

$$F(x) = \inf\{F_\infty(q) : q > x, q \in \mathbb{Q}\}.$$

On vérifie que F est croissante, continue à droite.

Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tq $\sup_{n \geq 1} \mu_n(\mathbb{R} \setminus [-A, A]) \leq \varepsilon$.

Soit $q \in \mathbb{Q}$, $q > A$. Alors $F_n(q) \geq 1 - \varepsilon$

En faisant $n \to \infty$, on obtient $F_\infty(q) \geq 1 - \varepsilon$.

D'où $F(A) \geq 1 - \varepsilon$.

On montre de même que $F(-A) \leq \varepsilon$.

Donc $\lim_{-\infty} F = 0$, $\lim_{+\infty} F = 1$.

Ainsi $\exists\, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tq $F = F_\mu$ (c'est la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à F, cf remarque précédente)

<u>Étape 2</u> : On vérifie que $\mu_{\varphi(n)} \Rightarrow \mu$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $\mu(\{x\}) = 0$. Alors

$$F(x) = \sup\{F_\infty(q) : q < x, q \in \mathbb{Q}\} = \inf\{F_\infty(q) : q > x, q \in \mathbb{Q}\}$$

(Pour la première égalité on peut utiliser $F(x) = \lim_{u \uparrow x} F(u)$)

Ainsi, si $q < x < q'$ avec $q, q' \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} F_\infty(q) = \lim_{n\to\infty} F_{\varphi(n)}(q) &\leq \liminf_{n\to\infty} F_{\varphi(n)}(x) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} F_{\varphi(n)}(x) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} F_{\varphi(n)}(q') = F_\infty(q'). \end{aligned}$$

En faisant $q \uparrow x$, $q' \downarrow x$, on conclut que $F_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$.

$\sim$

Remarques : • Il est tentant de reformuler en disant que $\{\mu_n ; n \geq 1\}$ est d'adhérence compact dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ muni d'une distance qui métrise la convergence étroite. Ceci sera effectivement fait dans le cours 3 mais c'est prématuré à ce stade.

• L'extension à $\mathbb{R}^n$ est similaire (cf Proposition 5.21 dans Kallenberg)

Définition On dit qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires réelles est tendue si la famille de leurs lois l'est.

Exemple Si $(X_i)_{i \in I}$ est bornée dans L_1 (i.e $\exists C > 0$ tq $\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i|] \leq C$) alors $(X_i)_{i \in I}$ est tendue. En effet, $\mathbb{P}(|X_i| \geq A) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{A} \leq \frac{C}{A}$.

Lemme des sous-sous-suites pour les mesures

Soit $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Alors $\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi $\forall \varphi$ extraction, $\exists \psi$ extraction tq $\mu_{\varphi \circ \psi(n)} \Rightarrow \mu$.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ ok

$\boxed{\Leftarrow}$ Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et φ extraction tq $\forall n$, $|\mu_{\varphi(n)}(f) - \mu(f)| \geq \varepsilon$. Par hypothèse, $\exists \psi$ extraction tq $\mu_{\varphi \circ \psi(n)} \Rightarrow \mu$. Alors $\mu_{\varphi \circ \psi(n)}(f) \to \mu(f)$, contradiction.

$\sim$

Corollaire : Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Alors $\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi $\begin{cases} (\mu_n)_{n\geq 1} \text{ est tendue} \\ \text{si } \mu_{\phi(n)} \Rightarrow \nu \text{ pour une extraction } \phi \text{ et } \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \text{ alors } \mu = \nu. \end{cases}$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Clair

$\boxed{\Leftarrow}$ On raisonne par l'absurde. D'après le lemme précédent, $\exists \psi$ extraction tq $\forall \varphi$ extraction, $\mu_{\varphi \circ \psi(n)} \not\Rightarrow \mu$.

Or $(\mu_{\psi(n)})$ est tendue, donc $\exists \varphi$ extraction et $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tq $\mu_{\varphi\circ\psi(n)} \Rightarrow \nu$. Donc $\nu = \mu$ par hypothèse, absurde.

En pratique, le corollaire précédent est **très** utile pour montrer que $\mu_n \Rightarrow \mu$ comme suit :

① On mq (μ_n) est tendue [Tension]

② On prend φ extraction et ν tq $\mu_{\phi(n)} \Rightarrow \nu$.

On montre que $\nu = \mu$ en utilisant une propriété qui caractérise une mesure. [Unicité de la limite]