Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Devoir maison

À rendre individuellement le mardi 5 novembre (rendu papier ou rendu électronique).

Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté.

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Les résultats du cours ou des feuilles d'exercices peuvent être utilisés sans démonstration, à condition de les citer clairement.

Le DM comporte des questions délicates : il est normal de ne pas réussir certaines questions.

Toutes les variables aléatoires mises en jeu sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Tout espace métrique E sera muni de sa tribu borélienne et on note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E.

***

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles uniformément intégrable.

(1) Pour $n \geq 1$ on pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) Montrer que l'adhérence dans L^1 de $\{X_n : n \geq 1\}$ forme une famille uniformément intégrable.

***

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique séparable et complet. Soit $I : E \to [0, \infty]$ une fonction telle que pour tout $c \in [0, \infty[$, $\{x \in E : I(x) \leq c\}$ est compact. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$. On considère les propriétés (A), (B) et (C) suivantes :

(A) pour tout fermé F de E on a $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(F) \leq -\inf_{x\in F} I(x)$.

(B) pour tout compact K de E on a $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(K) \leq -\inf_{x\in K} I(x)$.

(C) pour tout $M \geq 0$ il existe un compact K_M de E tel que $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(E \backslash K_M) \leq -M$.

(1) Démontrer que (C) et (B) impliquent (A).

(2) Démontrer que (A) implique (C).

***

Exercice 3. Soit $d \geq 1$ un entier. Soient $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$.

(1) Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ des mesures de probabilité de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ de la forme $P_{(X,Y)}$ où X et Y sont des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité avec X ayant loi μ et Y ayant loi ν est compact dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ muni de la distance de Lévy-Prokhorov d_{LP} (ici on note P_U pour la loi d'une variable aléatoire U).

 Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(2) On suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x|\mu(dx) < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}} |x|\nu(dx) < \infty$. Démontrer que l'infimum

$$I = \inf\{\mathbb{E}[|X-Y|] : X \text{ a pour loi } \mu \text{ et } Y \text{ a pour loi } \nu\}$$

est atteint.

* * *

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique séparable. Démontrer qu'il existe un ensemble dénombrable H de fonctions continues bornées de E dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et pour toute suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_1(E)$, μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si pour tout $f \in H$ on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

* * *

Exercice 5. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n(t) : 0 \leq t \leq 1)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}$. On note $X_n = (X_n(t) : 0 \leq t \leq 1)$.

(1) Démontrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifies :

   (a) la suite $(X_n(0))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$;

   (b) pour toute suite $\delta_k \to 0$ et pour toute suite $(n_k)_{k\geq 1}$, on a

$$\omega(X_{n_k}, \delta_k) \quad \xrightarrow[k\to\infty]{(\mathbb{P})} \quad 0,$$

   où $\omega(f,\delta) = \sup_{|s-t|\leq\delta, 0\leq s,t\leq 1} |f(s)-f(t)|$ désigne le module de continuité.

(2) Soit $(X^i_n)_{n\geq 1, 1\leq i\leq n}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}$ telle que pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $(X^i_n)_{1\leq i\leq n}$ ont la même loi que X_n (mais on ne les suppose pas indépendantes). On suppose que :

   (I) la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$;

   (II) la suite de variables aléatoires $\sup_{t\in[0,1]} |X_n(t)|$ est uniformément intégrable.

   Démontrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$, où Y_n est définie par

$$Y_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_n(t), \qquad t \in [0,1].$$

(3) Le résultat de la question (2) reste-t-il vrai si on remplace (II) par (II') défini par

   (II') la suite de variables aléatoires $\sup_{t\in[0,1]} |X_n(t)|$ est bornée dans L^1 ?

   Justifiez votre réponse.

* * *

 Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Petit problème 6.

(1) Démontrer qu'il existe un ensemble dénombrable D de fonctions lipschitziennes à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour toute suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si pour tout $f \in D$ on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

(2) Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne à support compact peut s'écrire comme la différence de deux fonctions lipschitziennes croissantes bornées.

Indication. On pourra considérer pour $a < b$ la fonction

$$g(a,b) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| : n \geq 1, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b \right\}.$$

(3) Soit Z une variable aléatoire réelle à densité. Soit $(Z_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de même loi que Z et P_n le polynôme $P_n(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - Z_i) \in \mathbb{R}[X]$. On note $(Y_i^n)_{1\leq i\leq n-1}$ les racines de P_n'. Démontrer que presque sûrement, $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{Y_i^n}$ converge étroitement lorsque n tend vers l'infini.

(4) Soit $\mathcal{E} = \{a_1, \ldots, a_K\} \subset \mathbb{C}$ un ensemble **fini**. Soit $(Z_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{E}$. Soit P_n le polynôme $P_n(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - Z_i) \in \mathbb{C}[X]$. On note $(Y_i^n)_{1\leq i\leq n-1}$ les racines complexes de P_n'. Démontrer que presque sûrement, $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{Y_i^n}$ converge étroitement lorsque n tend vers l'infini.

Fin