Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Devoir maison

À rendre individuellement le mardi 5 novembre (rendu papier ou rendu électronique).

Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté.

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Les résultats du cours ou des feuilles d'exercices peuvent être utilisés sans démonstration, à condition de les citer clairement.

Le DM comporte des questions délicates : il est normal de ne pas réussir certaines questions.

Toutes les variables aléatoires mises en jeu sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Tout espace métrique E sera muni de sa tribu borélienne et on note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E.

* * *

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles uniformément intégrable.

(1) Pour $n \geq 1$ on pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) Montrer que l'adhérence dans L^1 de $\{X_n : n \geq 1\}$ forme une famille uniformément intégrable.

Corrigé :

Pour les deux questions on utilise la caractérisation "ε-δ" de l'uniforme intégrabilité. Tout d'abord, puisque $(X_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable, elle est bornée dans L^1 : il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{E}[|X_n|] \leq C$ pour tout $n \geq 1$. Aussi, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout événement A avec $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ on a $\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$.

(1) Par inégalité triangulaire et linéarité de l'espérance, pour tout $n \geq 1$ on a $\mathbb{E}[|S_n|] \leq C$ et pour tout événement A avec $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ on a

$$\mathbb{E}[|S_n|\mathbb{1}_A] \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|X_k|\mathbb{1}_A] \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) Il suffit de montrer que si $X_n \to X$ dans L^1 alors $\mathbb{E}[|X|] \leq C$ et pour tout événement A avec $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ on a $\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$. La première inégalité provient du fait que $|X_n| \to |X|$ dans L^1 (car $||X_n| - |X|| \leq |X_n - X|$) et que la convergence dans L^1 implique la convergence des espérances. De même, pour la seconde inégalité on utilise le fait que $X_n\mathbb{1}_A \to X\mathbb{1}_A$ dans L^1 car $|X_n\mathbb{1}_A - X\mathbb{1}_A| \leq |X_n - X|$.

□

* * *

Exercice 2. Soit (E,d) un espace métrique séparable et complet. Soit $I : E \to [0,\infty]$ une fonction telle que pour tout $c \in [0,\infty[$, $\{x \in E : I(x) \leq c\}$ est compact. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$. On considère les propriétés (A), (B) et (C) suivantes :

(A) pour tout fermé F de E on a $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(F) \leq -\inf_{x\in F} I(x)$.

(B) pour tout compact K de E on a $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(K) \leq -\inf_{x\in K} I(x)$.

(C) pour tout $M \geq 0$ il existe un compact K_M de E tel que $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(E \backslash K_M) \leq -M$.

(1) Démontrer que (C) et (B) impliquent (A).

(2) Démontrer que (A) implique (C).

Corrigé :

(1) Supposons (C) et (B). Soit F fermé et posons $M = \inf_{x\in F} I(x)$. Soit $c \geq 0$ tel que $c < M$ et K_M un compact de E vérifiant l'inégalité de (C). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $F \cap K_M$ est compact, pour n assez grand :

$$\mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}_n(F \cap K_M) + \mathbb{P}_n(E \backslash K_M) \quad \leq \quad e^{\left(-\inf_{x\in F\cap K_M} I(x)+\varepsilon\right)n} + e^{(-M+\varepsilon)n} \leq 2e^{(-M+\varepsilon)n}.$$

Il s'ensuit que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(F) \leq -M + \varepsilon$$

et le résultat désiré en découle en faisant $\varepsilon \to 0$.

(2) Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite dénombrable dense. Soit $M > 0$. Pour $k \geq 1$ notons O_k l'ouvert

$$O_k = \bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{1}{n}\right)$$

Montrons que pour tout $k \geq 1$ il existe $\ell_k \geq 1$ tel que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}_n(E \backslash O_{\ell_k}) \leq e^{-nkM}. \tag{1}$$

Pour cela, soit $k \geq 1$ et soit $M' > M$. Par compacité il existe un entier $j_k \geq 1$ tel que

$$\{x \in E : I(x) \leq kM'\} \quad \subset \quad O_{j_k}.$$

Par (A) :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(E \backslash O_{j_k}) \leq -\inf_{x\in E\backslash O_{j_k}} I(x) \leq -kM'.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$\mathbb{P}_n(E \backslash O_{j_k}) \leq e^{-nkM}.$$

En prenant $\ell_k \geq j_k$ suffisamment grand, l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $n \geq 1$, ce qui donne (1).

Ensuite, on définit

$$K = \bigcap_{k \geq 1} \overline{O_{\ell_k}},$$

qui est fermé et précompact dans E complet, donc compact. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}_n(E \backslash K) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_n\left(E \backslash \overline{O_{\ell_k}}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_n\left(E \backslash O_{\ell_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-nkM} = \frac{e^{-nM}}{1 - e^{-nM}}.$$

On conclut que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}_n(E \backslash K_M) \leq -M.$$

Remarque. La propriété (C) s'appelle tension exponentielle. L'exercice 2 est inspiré des Lemma 2.5 et Lemma 2.6 dans James Lynch. Jayaram Sethuraman. "Large Deviations for Processes with Independent Increments." Ann. Probab. 15 (2) 610 - 627, April, 1987. https://doi.org/10.1214/aop/1176992161 et constitue à présent une brique de base de la théorie des grandes déviations. □

* * *

Exercice 3. Soit $d \geq 1$ un entier. Soient $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$.

(1) Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ des mesures de probabilité de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ de la forme $P_{(X,Y)}$ où X et Y sont des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité avec X ayant loi μ et Y ayant loi ν est compact dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ muni de la distance de Lévy-Prokhorov d_{LP} (ici on note P_U pour la loi d'une variable aléatoire U).

(2) On suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x| \mu(\mathrm{d}x) < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}} |x| \nu(\mathrm{d}x) < \infty$. Démontrer que l'infimum

$$I = \inf\{\mathbb{E}[|X - Y|] : X \text{ a pour loi } \mu \text{ et } Y \text{ a pour loi } \nu\}$$

est atteint.

Corrigé :

(1) Soit $(\mathbb{P}_{(X_n,Y_n)})_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. On montre que cette suite admet une sous-suite qui converge étroitement vers un élément de $\mathcal{F}$. Montrons d'abord que cette suite est tendue.

Soit $\varepsilon > 0$. Soient K_1 et K_2 deux compacts de $\mathbb{R}^d$ tels que $\mu(K_1) \geq 1 - \varepsilon$ et $\nu(K_2) \geq 1 - \varepsilon$. Alors pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left((X_n, Y_n) \in K_1 \times K_2\right) \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Ainsi, d'après le théorème de Prokhorov, il existe une sous-suite φ et une variable aléatoire (U, V) telle que $(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)})$ converge en loi vers (U, V). Il suffit de vérifier que U et X ont la même loi, ainsi que V et Y. Pour cela, la continuité de $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ implique que $X_{\varphi(n)}$ converge en loi vers U et $Y_{\varphi(n)}$ converge en loi vers V. Puisque $X_{\varphi(n)}$ a la même loi que X

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

et $Y_{\varphi(n)}$ a la même loi que Y, le résultat s'ensuit.

(2) Soit $P_{(X_n,Y_n)}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$\mathbb{E}[|X_n - Y_n|] \to I.$$

D'après la question (1), il existe une sous-suite φ et un élément $P_{(X,Y)}$ de $\mathcal{F}$ tels que $(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)})$ converge en loi vers (X,Y). Montrons que

$$\mathbb{E}[|X - Y|] = I.$$

Pour tout $R \geq 0$, la fonction $(x,y) \mapsto |x-y| \wedge R$ étant continue bornée,

$$\mathbb{E}[|X_n - Y_n| \wedge R] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[|X - Y| \wedge R].$$

Puisque $\mathbb{E}[|X_n - Y_n| \wedge R] \leq \mathbb{E}[|X_n - Y_n|]$, on en déduit que

$$\mathbb{E}[|X - Y| \wedge R] \leq I.$$

En faisant $R \to \infty$ on obtient $\mathbb{E}[|X - Y|] \leq I$. On a clairement $I \leq \mathbb{E}[|X - Y|]$ par définition de I, d'où le résultat.

Remarque. La famille $\mathcal{F}$ est appelée ensemble des couplages de X et Y, et le couplage de la question (2) est appelé couplage (ou transport) optimal pour le coût L^1. Cet exercice est inspiré de la Section 5.4.3 de ce document. □

* * *

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique séparable. Démontrer qu'il existe un ensemble dénombrable H de fonctions continues bornées de E dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et pour toute suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_1(E)$, μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si pour tout $f \in H$ on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

Corrigé :

On s'inspire d'une preuve des compléments du cours 3. Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite dénombrable dense. On considère l'ensemble H de fonctions $f_I^{K,N}$ avec $K, N \geq 1$ et $I \subset \{1, 2, \ldots, K\}$ définies par

$$f_I^{K,N}(x) = \max\left(1 - N d\left(x, \bigcup_{i \in I} B\left(x_i, \frac{1}{N}\right)\right), 0\right).$$

L'ensemble H est dénombrable et est bien constitué de fonctions continues bornées (et même lipschitziennes bornées). Vérifions qu'il convient. Supposons que pour tout $f \in H$ on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$ et vérifions que μ_n converge étroitement vers μ en montrant que $d_{LP}(\mu_n, \mu) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N > 1/\varepsilon$. Soit $K \geq 1$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{i \geq K} B(x_i, 1/N)\right) \leq 1/N \leq \varepsilon.$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Soit $A \in \mathcal{B}(E)$. Notons $I_A = \{i \in \{1, 2, \dots, K\} : B(x_i, 1/N) \cap A \neq \varnothing\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\leq \mu\left(\bigcup_{i \in I_A} B\left(x_i, \frac{1}{N}\right)\right) + \mu\left(\bigcup_{i \geq K} B(x_i, 1/N)\right) \\
&\leq \mu(f_{I_A}^{K,N}) + \varepsilon \\
&\leq \mu_n(f_{I_A}^{K,N}) + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

pour n assez grand. Mais par définition $\mu_n(f_{I_A}^{K,N}) \leq \mu_n(A^{(2/N)})$, où $A^{(2/N)}$ est le $2/N$-voisinage ouvert de A de sorte que pour n assez grand

$$\mu(A) \leq \mu_n(A^{(2\varepsilon)}) + 2\varepsilon,$$

ce qui implique $d_{LP}(\mu_n, \mu) \leq 2\varepsilon$ d'après la version non symétrique de la distance de Lévy-Prokhorov.
□

* * *

Exercice 5. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n(t) : 0 \leq t \leq 1)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}$. On note $X_n = (X_n(t) : 0 \leq t \leq 1)$.

(1) Démontrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiés :

 (a) la suite $(X_n(0))_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$;

 (b) pour toute suite $\delta_k \to 0$ et pour toute suite $(n_k)_{k \geq 1}$, on a

$$\omega(X_{n_k}, \delta_k) \quad \xrightarrow[k \to \infty]{(\mathbb{P})} \quad 0,$$

 où $\omega(f, \delta) = \sup_{|s-t| \leq \delta, 0 \leq s, t \leq 1} |f(s) - f(t)|$ désigne le module de continuité.

(2) Soit $(X_n^i)_{n \geq 1, 1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}$ telle que pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $(X_n^i)_{1 \leq i \leq n}$ ont la même loi que X_n (mais on ne les suppose pas indépendantes). On suppose que :

 (I) la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$;

 (II) la suite de variables aléatoires $\sup_{t \in [0,1]} |X_n(t)|$ est uniformément intégrable.

 Démontrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$, où Y_n est définie par

$$Y_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_n^i(t), \qquad t \in [0, 1].$$

(3) Le résultat de la question (2) reste-t-il vrai si on remplace (II) par (II') défini par

 (II') la suite de variables aléatoires $\sup_{t \in [0,1]} |X_n(t)|$ est bornée dans L^1 ?

 Justifiez votre réponse.

Corrigé :

(1) D'après le cours, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$ si et seulement si la suite $(X_n(0))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists \delta > 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\omega(X_n,\delta) \geq \eta\right) \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Il s'agit donc de démontrer que (2) est équivalent à (b). Démontrons que les deux négations sont équivalentes :

– La négation de (2) est : il existe $\varepsilon, \eta > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\omega(X_n,\delta) \geq \eta\right) > \varepsilon.$$

– La négation de (b) est : il existe une suite $\delta_k \to 0$ et une suite $n_k \to \infty$ tels que $\omega(X_{n_k},\delta_k)$ ne converge pas en probabilité vers 0.

En supposant la négation de (2), il existe $\varepsilon, \eta > 0$ et une suite (n_k) telle que pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(\omega(X_{n_k}, 1/k) \geq \eta\right) > \varepsilon.$$

Ainsi en prenant $\delta_k = 1/k$ on a bien que $\omega(X_{n_k},\delta_k)$ ne converge pas en probabilité vers 0.
En supposant la négation de (b), il existe une suite $\delta_k \to 0$, $\eta, \varepsilon > 0$ et une suite (n'_k) telle que pour tout $k \geq 1$

$$\mathbb{P}\left(\omega(X_{n'_k}, \delta_k) \geq \eta\right) > \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$, pour tout k assez grand tel que $\delta_k < \delta$, on a

$$\mathbb{P}\left(\omega(X_{n'_k}, \delta) \geq \eta\right) > \varepsilon$$

ce qui démontre la négation de (2).

(2) On utilise le résultat de la question (1). On démontre tout d'abord que $(Y_n(0))_{n\geq 1}$ est tendue en montrant qu'elle est bornée dans L^1. Ceci provient du fait que par linéarité

$$\mathbb{E}\left[|Y_n(0)|\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n(0)|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} |X_n(t)|\right],$$

et puisque la suite de variables aléatoires $\sup_{t\in[0,1]}|X_n(t)|$ est uniformément intégrable elle est bornée dans L^1.

Pour la tension, soit une suite $\delta_k \to 0$ et une suite $(n_k)_{k\geq 1}$. Vérifions que $\omega(Y_{n_k},\delta_k)$ converge en probabilité vers 0. Tout d'abord, puisque la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$, $\omega(X_{n_k},\delta_k)$

converge en probabilité vers 0. D'après la question (II), cette suite est également uniformément intégrable et donc $\mathbb{E}\left[\omega(X_{n_k}, \delta_k)\right] \to 0$. Ainsi :

$$\omega(Y_{n_k}, \delta_k) \leq \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \omega(X^i_{n_k}, \delta),$$

de sorte que

$$\mathbb{E}\left[\omega(Y_{n_k}, \delta_k)\right] \leq \mathbb{E}\left[\omega(X_{n_k}, \delta_k)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il s'ensuit que $\omega(Y_{n_k}, \delta_k)$ converge dans L^1 vers 0 et donc en probabilité.

(3) Non. Prenons par exemple une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètres respectifs $1/n$ et prenons $(X^i_n)_{1\leq i\leq n}$ i.i.d. de même loi que X_n défini par

$$X_n(t) = \begin{cases} n^2 B_n t & \text{si } t \leq 1/n \\ nB_n & \text{si } t \geq 1/n. \end{cases}$$

Ainsi $\sup_{t\in[0,1]} |X_n(t)|$ est bornée dans L^1 par 1, mais $(Y_n)_{n\geq 1}$ n'est tendue dans $\mathcal{C}$: avec probabilité tendant vers $1/e$ un seul des $(X^i_n)_{1\leq i\leq n}$ n'est pas la fonction nulle, et dans ce cas $\omega(Y_n, 1/n) = 1$, ce qui fait que (2) n'est pas vérifié.

Remarque. Cet exercice est inspiré de l'appendice A de l'article Berzunza Ojeda G, Janson S. The distance profile of rooted and unrooted simply generated trees. Combinatorics, Probability and Computing. 2022;31(3):368-410. doi:10.1017/S0963548321000304. □

***

Petit problème 6.

(1) Démontrer qu'il existe un ensemble dénombrable D de fonctions lipschitziennes à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour toute suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si pour tout $f \in D$ on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

(2) Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne à support compact peut s'écrire comme la différence de deux fonctions lipschitziennes croissantes bornées.

Indication. On pourra considérer pour $a < b$ la fonction

$$g(a,b) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| : n \geq 1, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b\right\}.$$

(3) Soit Z une variable aléatoire réelle à densité. Soit $(Z_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de même loi que Z et P_n le polynôme $P_n(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - Z_i) \in \mathbb{R}[X]$. On note $(Y^n_i)_{1\leq i\leq n-1}$ les racines de P_n'. Démontrer que presque sûrement, $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{Y^n_i}$ converge étroitement lorsque n tend vers l'infini.

(4) Soit $\mathcal{E} = \{a_1, \ldots, a_K\} \subset \mathbb{C}$ un ensemble **fini**. Soit $(Z_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{E}$. Soit P_n le polynôme $P_n(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - Z_i) \in \mathbb{C}[X]$. On note $(Y^n_i)_{1\leq i\leq n-1}$ les racines complexes de P_n'. Démontrer que presque sûrement, $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{Y^n_i}$ converge étroitement lorsque n tend vers l'infini.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Corrigé :

(1) Une variante de l'ensemble du cours 1 convient (polynômes à coefficients rationnels multipliés par des fonctions plateaux régularisées).

(2) Pour $x \geq 0$, posons $F(x) = g(0,x) \geq 0$ et $G(x) = F(x) - f(x) \geq 0$. Alors :

- clairement F est croissante
- pour montrer que G est croissante, pour $0 < a < b$:

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) - (f(b) - f(a)) \geq 0.$$

En effet, si $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$, en posant $x_{n+1} = b$ on voit que par définition

$$|f(b) - f(a)| + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq g(0,b)$$

et en passant au sup

$$|f(b) - f(a)| + g(0,a) \leq g(0,b).$$

Ainsi

$$F(b) - F(a) \geq |f(b) - f(a)| \geq f(b) - f(a).$$

Ainsi G est croissante.

- Vérifions que F et G sont lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}_+$. Supposons que f est L-lipschitzienne. Alors en utilisant le fait que $g(a,c) \leq g(a,b) + g(b,c)$ pour $a < b < c$, on voit que F est L-lipschitzienne, puis que G est L-lipschitzienne. Pour montrer que F et G sont bornées, on remarque que puisque f est à support compact, F est constante à partir d'un certain rang, et donc G également. Ainsi F est G sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x \leq 0$, on pose $F(x) = g(x,0)$ et $G(x) = F(x) - f(x)$ et le raisonnement précédent s'adapte.

(3) Puisque Z est à densité, les racines de P_n sont presque sûrement différentes. D'après le théorème de Rolle, les racines de P_n' sont réelles et situées entre les zéros de P_n. Notons ainsi $Z_1^n < Z_2^n < \cdots < Z_n^n$ les racines de P_n et quitte à renuméroter les Y_i^n on peut supposer que

$$Z_1^n < Y_1^n < Z_2^n < \cdots < Y_{n-1}^n < Z_n^n.$$

D'après les questions (1) et (2), il suffit de montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante lipschtzienne bornée on a

$$\text{p.s.} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(Y_k^n) \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[f(Z)].$$

Pour cela, on remarque que par croissance,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(Z_k) - \frac{f(Z_n^n)}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(Z_k^n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(Y_k^n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(Z_k^n) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(Z_k) - \frac{f(Z_1^n)}{n}.$$

D'après la loi des grands nombres et puisque f est bornée, les deux termes tout à gauche et tout à droite de cette inégalité convergent p.s. vers $\mathbb{E}[f(Z)]$ et le résultat s'ensuit.

(4) D'après la question (1) il suffit de montrer que pour fonction f lipschitzienne bornée on a

$$\text{p.s.} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_i^n) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[f(Z_1)].$$

Pour cela, tout d'abord on remarque que

$$P_n(X) = \prod_{i=1}^{k} (X-a_i)^{N_i^n} \qquad \text{avec} \qquad N_i^n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{Z_k=a_i}.$$

Le polynôme P_n' a alors, pour $1 \leq i \leq K$, pour racine a_i avec multiplicité $N_i^n - 1$, et $K-1$ autres racines complexes notées $(W_i^n)_{1\leq i\leq K-1}$. On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_i^n) = \sum_{i=1}^{K} \frac{N_i^n}{n} f(a_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} f(W_i^n).$$

D'après la loi des grands nombres, p.s. $N_i^n \to \mathbb{P}(Z_1 = a_i)$. Puisque f est bornée, il s'ensuit que p.s.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(Y_i^n) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \sum_{i=1}^{K} f(a_i)\mathbb{P}(Z_1 = a_i) = \mathbb{E}[f(Z_1)].$$

Remarque. Les questions (2) et (3) ont été suggérées par Valentin Pesce. L'étude des points critiques de polynômes aléatoires est une direction de recherche active en théorie des probabilités. □

Fin