Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Devoir maison

À rendre individuellement le mardi 7 novembre (rendu papier ou rendu électronique).

Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté.

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Les résultats du cours ou des feuilles d'exercices peuvent être utilisés sans démonstration, à condition de les citer clairement.

Le DM comporte des questions délicates : il est normal de ne pas réussir certaines questions.

Toutes les variables aléatoires mises en jeu sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

* * *

Exercice 1. Soit (X_n) et (Y_n) des variables aléatoires réelles telles que $0 \leq X_n \leq Y_n$. On suppose que X_n converge en probabilité et que Y_n converge dans L^1. Montrer que X_n converge dans L^1.

* * *

Exercice 2. Soient $p, q > 1$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Soit $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires bornée dans L^p (c'est-à-dire $\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p} < \infty$). Démontrer que la famille $(XY_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable.

* * *

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé séparable, $n \geq 2$ un entier et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables i.i.d.

(1) On suppose que la v.a. X_1 est tendue. Montrer que la v.a. $X_1 + \cdots + X_n$ est tendue.

(2) La réciproque est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

* * *

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique polonais. On munit l'ensemble $\mathcal{M}_1(E)$ des mesures de probabilité sur E de la distance de Lévy-Prokhorov d_{LP}. Soit $(M_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$.

(1) Soit M une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

  (a) $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_n, M) \to 0$ en probabilité.

  (b) pour toute fonction continue bornée $f : E \to \mathbb{R}$ on a $\int f \, \mathrm{d}M_n \to \int f \, \mathrm{d}M$ en probabilité.

  (c) pour tout extraction φ il existe un extraction ψ telle que presque sûrement $M_{\varphi \circ \psi(n)}$ converge vers M dans $(\mathcal{M}_1(E), \mathrm{d}_{\mathrm{LP}})$.

  On pourra utiliser le fait suivant (porisme de la preuve du deuxième point de la dernière proposition dans les compléments du cours 3) : il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \ldots, f_K \in \mathcal{F}$ et $\delta > 0$ tels que

$$\left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(E) : \left| \int f_i d\nu - \int f_i d\mu \right| < \delta \text{ pour tout } 1 \leq i \leq K \right\} \subset B(\mu, \varepsilon),$$

  où $B(\mu, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $\mathcal{M}_1(E)$ centrée en μ et de rayon ε pour d_{LP}.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(2) Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ une mesure de probabilité (déterministe). Conditionnellement à M_n, soient Π_n^1 et Π_n^2 deux variables aléatoires indépendantes de loi M_n (c'est-à-dire que $\mathbb{E}[f(\Pi_n^1)|M_n] = \int_E f \, \mathrm{d}M_n$ pour toute fonction mesurable positive f). On suppose que (Π_n^1, Π_n^2) converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers (Π^1, Π^2), où Π^1 et Π^2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi μ. Démontrer que $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_n, \mu) \to 0$ en probabilité.

* * *

Petit problème 5. Soit $(E_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre 1. On pose $S_0 = 0$ et $S_i = E_1 + \cdots + E_i$ pour $i \geq 1$. Pour $t \geq 0$ on pose $P(t) = \mathrm{Card}\{i \geq 1 : S_i \leq t\}$, de sorte que P est un processus de Poisson de paramètre 1.

Première partie.

(1) Montrer que pour tout $T \geq 0$ on a $\sup_{0 \leq u \leq T} \left| \frac{P(un)}{n} - u \right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \quad 0.$

(2) Est-il vrai que $\sup_{u \geq 0} \left| \frac{P(un)}{n} - u \right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \quad 0$? Justifiez votre réponse.

Deuxième partie. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme sur tout compact. On suppose qu'il existe une variable aléatoire $Y \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que pour tout $T \geq 0$, $(Y_n(t) : 0 \leq t \leq T)$ converge en loi vers $(Y(t) : 0 \leq t \leq T)$ dans $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Démontrer que pour tout $T \geq 0$ la convergence suivante a lieu en probabilité

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| Y_n\left(\frac{P(tn)}{n}\right) - Y_n(t) \right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \quad 0.$$

Troisième partie. Soient $T > 0$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction lipschitzienne et $z_0 \in \mathbb{R}_+$.

(4) Justifier que l'équation différentielle $z'(t) = \beta(z(t))$ avec $z(0) = z_0$ admet une unique solution sur $[0, T]$, qui sera notée z dans la suite.

Pour $n \geq 1$, on fixe $Z_n(0) \in \mathbb{R}$ et on suppose que $(Z_n(t))_{0 \leq t \leq T}$ vérifie pour tout $0 \leq t \leq T$:

$$Z_n(t) = Z_n(0) + P\left(n \int_0^t \beta\left(\frac{Z_n(s)}{n}\right) \mathrm{d}s\right),$$

On pose $\bar{Z}_n(t) = Z_n(t)/n$ et on suppose que $\bar{Z}_n(0) \to z_0$ lorsque $n \to \infty$.

(5) Montrer que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{Z}_n(t) - z(t)| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \quad 0.$$

Indication. On pourra utiliser le lemme de Gronwall.

Fin