Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Devoir maison

À rendre individuellement le mardi 7 novembre (rendu papier ou rendu électronique).

Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté.

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Les résultats du cours ou des feuilles d'exercices peuvent être utilisés sans démonstration, à condition de les citer clairement.

Le DM comporte des questions délicates : il est normal de ne pas réussir certaines questions.

Toutes les variables aléatoires mises en jeu sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

* * *

Exercice 1. Soit (X_n) et (Y_n) des variables aléatoires réelles telles que $0 \leq X_n \leq Y_n$. On suppose que X_n converge en probabilité et que Y_n converge dans L^1. Montrer que X_n converge dans L^1.

Corrigé :

Il suffit de montrer que (X_n) est uniformément intégrable. À cet effet, on écrit pour $A > 0$:

$$\mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{X_n \geq A}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y_n \mathbb{1}_{Y_n \geq A}\right],$$

d'où

$$\limsup_{A\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{X_n \geq A}\right] \leq \limsup_{A\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n \mathbb{1}_{Y_n \geq A}\right] = 0,$$

car Y_n converge dans L^1 et donc est uniformément intégrable. □

* * *

Exercice 2. Soient $p, q > 1$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Soit $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires bornée dans L^p (c'est-à-dire $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p} < \infty$). Démontrer que la famille $(XY_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable.

Corrigé :

Première solution. On utilise la caractérisation $\varepsilon - \delta$ de l'uniforme continuité. Tout d'abord la famille $(XY_i)_{i\in I}$ est bornée dans L^1, puisqu'en vertu de l'inégalité de Holder :

$$\mathbb{E}[|XY_i|] \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{1/q}\, \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p}$$

et que $(Y_i)_{i\in I}$ est bornée dans L^p.

Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $X^q \in L^1$, la famille $\{X^q\}$ est intégrable. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ implique $\mathbb{E}[X^q \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon^q / C^q$ où $C = \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p}$. Par inégalité de Holder on a alors pour tout $i \in I$:

$$\mathbb{E}[|XY_i| \mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[|X|^q \mathbb{1}_{\mathbb{A}}]^{1/q}\, \mathbb{E}[|Y_i|^p]^{1/p} \leq \varepsilon,$$

d'où le résultat.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Deuxième solution. Soit $i \in I$. On commence par utiliser l'inégalité $ab \leq a^p/p + b^q/q$ pour $a, b \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|XY_i|\mathbb{1}_{|XY_i|>A}] &\leq \mathbb{E}[|XY_i|\mathbb{1}_{|X|^q/q+|Y_i|^p/p>A}]\\ &\leq \mathbb{E}[|XY_i|(\mathbb{1}_{|X|^q/q>A/2} + \mathbb{1}_{|Y_i|^p/p>A/2})]\\ &= \mathbb{E}[|Y_i||X|\mathbb{1}_{|X|^q/q>A/2}] + \mathbb{E}[|X||Y_i|\mathbb{1}_{|Y_i|^p/p>A/2}]\end{aligned}$$

Pour contrôler le premier terme, on utilise l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E}[|Y_i||X|\mathbb{1}_{|X|^q/q>A/2}] \leq \mathbb{E}\left[|Y_i|^p\right]^{1/p} \mathbb{E}\left[|X|^q \mathbb{1}_{|X|^q/q>A/2}\right]^{1/q}.$$

Le premier terme est borné uniformément en i et le deuxième terme tend vers 0 par convergence dominée car $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Le contrôle de $\mathbb{E}[|X||Y_i|\mathbb{1}_{|Y_i|^p/p>A/2}]$ est un peu plus délicat. Pour $R > 0$ on écrit en utilisant l'inégalité d'Hölder

$$\mathbb{E}(|XY_i|\mathbb{1}_{|Y_i|^p/p>A/2}) \leq R\mathbb{E}(|Y_i|\mathbb{1}_{|Y_i|^p/p>A/2}) + \mathbb{E}(|XY_i|\mathbb{1}_{|X|>R}) \leq R\mathbb{E}(|Y_i|\mathbb{1}_{|Y_i|^p/p>A/2}) + \|X\mathbb{1}_{|X|>R}\|_q \|Y_i\|_p.$$

Puisque la famille $(Y_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable et bornée dans L^p, on a

$$\sup_{i\in I} \mathbb{E}(|XY_i|\mathbb{1}_{|Y_i|^p/p>A/2}) \leq R \underbrace{\sup_{i \in I} \mathbb{E}(|Y_i|\mathbb{1}_{|Y_i|^p/p>A/2})}_{\to 0 \text{ quand } A \to \infty} + \|X\mathbb{1}_{|X|>R}\|_q \underbrace{\sup_{i\in I} \|Y_i\|_p}_{<\infty}.$$

Enfin, comme précédemment,

$$\|X\mathbb{1}_{|X|>R}\|_q \quad \xrightarrow[R\to\infty]{} \quad 0$$

par convergence dominée. Ceci conclut. □

* * *

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé séparable, $n \geq 2$ un entier et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables i.i.d.

(1) On suppose que la v.a. X_1 est tendue. Montrer que la v.a. $X_1 + \cdots + X_n$ est tendue.

(2) La réciproque est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

Corrigé :

(1) Soit $\varepsilon > 0$ et K compact de E tel que $\mathbb{P}(X_1 \in K) \geq 1 - \varepsilon/n$. Soit

$$\Phi \quad : \quad \begin{array}{ccc} E^n & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array},$$

continue. Alors en notant $K_n = \Phi(K \times K \times \cdots \times K)$, compact comme image continue d'un compact on a

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots X_n \notin K_n) \leq \mathbb{P}(\exists 1 \leq i \leq n : X_i \notin K) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \notin K) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

de sorte que $\mathbb{P}(X_1 + \cdots X_n \in K_n) \geq 1 - \varepsilon$, d'où le résultat.

(2) La réponse est oui. Pour cela, il suffit de démontrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X+Y$ est tendue, alors X et Y sont tendues. Le résultat voulu découle alors par récurrence.

À cet effet, soit $\varepsilon > 0$ et K compact tel que $\mathbb{P}(X+Y \in K) > 1-\varepsilon$. Notons $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ les lois respectives de X et Y de sorte que par Fubini

$$1-\varepsilon < \int_{E\times E} \mathbb{1}_K(x+y)\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x)\mathbb{P}_Y(\mathrm{d}y) = \int_E \mathbb{P}_Y(K-x)\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x).$$

Il s'ensuit qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathbb{P}_Y(K-x) > 1-\varepsilon$. Puisque $K-x$ est compact comme image d'un compact par l'application $z \mapsto z-x$, ceci montre que Y est tendue, et par symétrie X l'est également. Ceci conclut.

□

* * *

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique polonais. On munit l'ensemble $\mathcal{M}_1(E)$ des mesures de probabilité sur E de la distance de Lévy-Prokhorov d_{LP}. Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$.

(1) Soit M une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

  (a) $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_n, M) \to 0$ en probabilité.

  (b) pour toute fonction continue bornée $f : E \to \mathbb{R}$ on a $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}M$ en probabilité.

  (c) pour tout extraction φ il existe un extraction ψ telle que presque sûrement $M_{\varphi\circ\psi(n)}$ converge vers M dans $(\mathcal{M}_1(E), \mathrm{d}_{\mathrm{LP}})$.

On pourra utiliser le fait suivant (porisme de la preuve du deuxième point de la dernière proposition dans les compléments du cours 3) : il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \ldots, f_K \in \mathcal{F}$ et $\delta > 0$ tels que

$$\left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(E) : \left| \int f_i d\nu - \int f_i d\mu \right| < \delta \text{ pour tout } 1 \leq i \leq K \right\} \subset B(\mu, \varepsilon),$$

où $B(\mu,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $\mathcal{M}_1(E)$ centrée en μ et de rayon ε pour d_{LP}.

(2) Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ une mesure de probabilité (déterministe). Conditionnellement à M_n, soient Π_n^1 et Π_n^2 deux variables aléatoires indépendantes de loi M_n (c'est-à-dire que $\mathbb{E}[f(\Pi_n^1)|M_n] = \int_E f \mathrm{d}M_n$ pour toute fonction mesurable positive f). On suppose que (Π_n^1, Π_n^2) converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers (Π^1, Π^2), où Π^1 et Π^2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi μ. Démontrer que $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_n, \mu) \to 0$ en probabilité.

Corrigé :

(1) L'équivalence entre (a) et (c) provient du fait général que $X_n \to X$ en probabilité si et seulement si de toute sous-suite on peut extraire une sous-sous-suite qui converge p.s. vers X.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Montrons que (c) implique (b). Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue bornée. Il suffit de montrer que pour tout extraction ϕ il existe une extraction ψ telle que $\int f \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)} \to \int f \mathrm{d}M$ presque sûrement. Soit ϕ extraction. Par (c), soit ψ extraction telle que presque sûrement $M_{\varphi\circ\psi(n)}$ converge vers M dans $(\mathcal{M}_1(E), \mathrm{d}_{\mathrm{LP}})$. L'espace métrique E étant polonais, la convergence au sens de d_{LP} implique la convergence étroite, et donc presque sûrement $M_{\varphi\circ\psi(n)}$ converge étroitement vers M et donc $\int f \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)} \to \int f \mathrm{d}M$ presque sûrement.

Montrons finalement (b) implique (a). Soit ϕ extraction. On montre qu'il existe une extraction ψ telle que presque sûrement $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_{\varphi\circ\psi(n)}, M) \to 0$. Tout d'abord, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, on a $\int f \mathrm{d}M_{\phi(n)} \to \int f \mathrm{d}M$ en probabilité, de sorte qu'il existe une extraction ψ telle que $\int f \mathrm{d}M_{\phi\circ(n)} \to \int f \mathrm{d}M$ presque sûrement. Comme $\mathcal{F}$ est dénombrable, par extraction diagonale, il existe une extraction ψ telle que

$$\text{presque sûrement}, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \int f \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int f \mathrm{d}M. \tag{1}$$

Vérifions que presque sûrement $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_{\varphi\circ\psi(n)}, M) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le rappel, il existe $f_1, \ldots, f_K \in \mathcal{F}$ et $\delta > 0$ tels que

$$\left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(E) : \left| \int f_i d\nu - \int f_i dM \right| < \delta \text{ pour tout } 1 \leq i \leq K \right\} \subset B(M, \varepsilon).$$

ATTENTION. Ici $f_1, \ldots, f_K$ sont aléatoires.

Par (1), presque sûrement, pour n assez grand on a

$$\left| \int f_i \mathrm{d}M_{\phi\circ\psi(n)} - \int f_i \mathrm{d}M \right| < \delta$$

pour tout $1 \leq i \leq K$. Il s'ensuit que presque sûrement, pour n assez grand on a $\mathrm{d}_{\mathrm{LP}}(M_{\varphi\circ\psi(n)}, M) \leq \varepsilon$, et le résultat s'ensuit.

(2) D'après (1), il suffit de montrer que pour toute fonction continue bornée $f : E \to \mathbb{R}$ on a $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}\mu$ en probabilité. Pour cela, l'idée est d'utiliser une technique de second moment en montrant que

$$\mathbb{E}\left[\int f \mathrm{d}M_n \right] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int f \mathrm{d}\mu \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}\left(\int f \mathrm{d}M_n \right) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0, \tag{2}$$

et le résultat s'ensuivra par Bienaymé-Chebyshev.

Pour la première convergence, on remarque que par définition de Π_n^1 on a

$$\mathbb{E}\left[\int f \mathrm{d}M_n \right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\Pi_n^1)|M_n]] = \mathbb{E}[f(\Pi_n^1)] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}[f(\Pi^1)] = \int f d\mu,$$

où la convergence provient du fait que Π_n^1 converge en loi vers Π^1, qui a pour loi μ.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Pour la seconde convergence, en utilisant le fait que $\mathbb{E}[f(\Pi_n^1)|M_n] = \mathbb{E}[f(\Pi_n^2)|M_n] = \int_E f \,\mathrm{d}M_n$ on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int f \mathrm{d}M_n\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[f(\Pi_n^1)|M_n]\,\mathbb{E}[f(\Pi_n^2)|M_n]\right] = \mathbb{E}[f(\Pi_n^1)f(\Pi_n^2)|M_n] = \mathbb{E}[f(\Pi_n^1)f(\Pi_n^2)],$$

où l'avant-dernière égalité provient du fait que Π_n^1 et Π_n^2 sont indépendants conditionnellement à M_n. Ainsi, par hypothèse de convergence en loi,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int f \mathrm{d}M_n\right)^2\right] \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \mathbb{E}[f(\Pi^1)f(\Pi^2)] = \mathbb{E}[f(\Pi^1)]\,\mathbb{E}[f(\Pi^2)] = \left(\int f \mathrm{d}\mu\right)^2,$$

ce qui conclut.

Remarque. La première question est inspirée de la Proposition 2.2 de cet article et la deuxième question provient du Lemma 3.1 dans cet article. □

* * *

Petit problème 5. Soit $(E_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre 1. On pose $S_0 = 0$ et $S_i = E_1 + \cdots + E_i$ pour $i \geq 1$. Pour $t \geq 0$ on pose $P(t) = \mathrm{Card}\{i \geq 1 : S_i \leq t\}$, de sorte que P est un processus de Poisson de paramètre 1.

Première partie.

(1) Montrer que pour tout $T \geq 0$ on a $\displaystyle\sup_{0\leq u\leq T}\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \quad 0.$

(2) Est-il vrai que $\displaystyle\sup_{u\geq 0}\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \quad 0$? Justifiez votre réponse.

Deuxième partie. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme sur tout compact. On suppose qu'il existe une variable aléatoire $Y \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que pour tout $T \geq 0$, $(Y_n(t) : 0 \leq t \leq T)$ converge en loi vers $(Y(t) : 0 \leq t \leq T)$ dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Démontrer que pour tout $T \geq 0$ la convergence suivante a lieu en probabilité

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_n\left(\frac{P(tn)}{n}\right) - Y_n(t)\right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \quad 0.$$

Troisième partie. Soient $T > 0$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction lipschitzienne et $z_0 \in \mathbb{R}_+$.

(4) Justifier que l'équation différentielle $z'(t) = \beta(z(t))$ avec $z(0) = z_0$ admet une unique solution sur $[0,T]$, qui sera notée z dans la suite.

Pour $n \geq 1$, on fixe $Z_n(0) \in \mathbb{R}$ et on suppose que $(Z_n(t))_{0\leq t\leq T}$ vérifie pour tout $0 \leq t \leq T$:

$$Z_n(t) = Z_n(0) + P\left(n\int_0^t \beta\left(\frac{Z_n(s)}{n}\right)\mathrm{d}s\right),$$

On pose $\bar{Z}_n(t) = Z_n(t)/n$ et on suppose que $\bar{Z}_n(0) \to z_0$ lorsque $n \to \infty$.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(5) Montrer que

$$\sup_{0 \le t \le T} |\bar{Z}_n(t) - z(t)| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \quad 0.$$

Indication. On pourra utiliser le lemme de Gronwall.

Corrigé :

(1) On commence par montrer que

$$\frac{P(t)}{t} \quad \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} \quad 1. \tag{3}$$

Il est clair que $P(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$ car P est croissante et $P(S_n) = n$. On remarque que $S_{P(t)} \le t < S_{P(t)+1}$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la loi des grands nombres, il existe $N > 0$ tel que pour $n \ge N$ on a $|S_n/n - 1| \le \varepsilon$. Alors pour t assez grand pour que $P(t) \ge N$ on a

$$(1-\varepsilon)P(t) \le S_{P(t)} \le t < S_{P(t)+1} \le (1+\varepsilon)(P(t)+1).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{t} \le \frac{P(t)}{t} \le \frac{1}{1-\varepsilon}$$

et (3) en découle.

Revenons maintenant à la question initiale. En utilisant (3), soient $\varepsilon > 0$ et $N > 0$ tels que $|P(t)/t - 1| \le \varepsilon$ pour $t \ge N$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le u\le T} \left| \frac{P(un)}{n} - u \right| &\le \sup_{0<u\le N/n} u \left| \frac{P(un)}{un} - 1 \right| + \sup_{N/n \le u \le T} u \left| \frac{P(un)}{un} - 1 \right| \\
&\le \frac{N}{n} \sup_{0<u\le N} \left| \frac{P(u)}{u} - 1 \right| + T \sup_{u \ge N} \left| \frac{P(u)}{u} - 1 \right| \\
&\le \frac{N}{n} \sup_{0<u\le N} \left| \frac{P(u)}{u} - 1 \right| + T\varepsilon.
\end{aligned}$$

Le premier terme tend presque sûrement vers 0 quand $n \to \infty$, d'où le résultat.

(2) Par définition, on remarque que pour $u = S_K/n$ on a

$$\left| \frac{P(un)}{n} - u \right| = \left| \frac{K}{n} - \frac{S_K}{n} \right| = \frac{|S_K - K|}{n}.$$

Soit A_K l'événement $\{|S_K - K| \ge \sqrt{K}\}$. Alors l'événement

$$\limsup_K A_K = \bigcap_{n\ge 0} \bigcup_{k \ge n} A_k$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

appartient à la tribu queue de $(E_i)_{i\geq 1}$ et sa probabilité vaut donc 0 ou 1 d'après la loi de 0-1 de Kolmogorov. Mais

$$\mathbb{P}\left(\limsup_K A_K\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

D'après le théorème central limite, $\mathbb{P}(A_k) \to 1/2$ lorsque $k\to\infty$. On en déduit que $\mathbb{P}(\limsup_K A_K) = 1$. Donc presque sûrement pour une infinité de valeurs de K on a $|S_K - K| \geq \sqrt{K}$. Donc presque sûrement

$$\sup_{u\geq 0}\left|\frac{P(un)}{n} - u\right| \geq \frac{\sqrt{K}}{n}$$

pour une infinité de valeurs de K. Donc presque sûrement le sup vaut $+\infty$.

(3) Ceci provient essentiellement de la continuité de l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\times\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}_+) & \rightarrow & \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}_+) \\ & & (f,g) & \mapsto & (f(g(t)) : 0\leq t\leq T). \end{array}$$

Cependant $(P(tn)/n)_{0\leq t\leq T}$ n'est pas continue, donc il faut faire un peu attention.

Soient $\varepsilon,\eta>0$. Pour $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $t>0$ posons

$$\omega_L(f,\delta) = \sup_{|s-t|\leq\delta, 0\leq s,t\leq L} |f(s)-f(t)|.$$

Par continuité de Y, on a $\omega_{2T}(Y,\delta)\to 0$ quand $\delta\to 0$. On peut donc choisir $\delta>0$ tel que

$$\mathbb{P}(\omega_{2T}(Y,\delta)\geq\eta)\leq\varepsilon.$$

Par continuité de $f\mapsto\omega_{2T}(f,\delta)$, $\omega_{2T}(Y_n,\delta)$ converge en loi vers $\omega_{2T}(Y,\delta)$. On en déduit que pour n assez grand,

$$\mathbb{P}(\omega_{2T}(Y_n,\delta)\geq\eta)\leq 2\varepsilon.$$

Notons

$$\Delta_n = \sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{P(tn)}{n} - t\right|.$$

D'après la question (1), on a $\Delta_n\to 0$ presque sûrement. En particulier, pour n assez grand

$$\mathbb{P}\left(\frac{P(Tn)}{n}\leq 2T\right)\geq 1-\varepsilon$$

et presque sûrement $\Delta_n\leq\delta$ pour n assez grand.

Alors on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|Y_n\left(\frac{P(tn)}{n}\right) - Y_n(t)\right|\geq\eta\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{P(Tn)}{n} > 2T\right) + \mathbb{P}(\omega_{2T}(Y_n,\Delta_n)\geq\eta) \leq \varepsilon + \mathbb{P}(\omega_{2T}(Y_n,\Delta_n)\geq\eta).$$

Par ailleurs

$$\mathbb{P}(\omega(Y_n,\Delta_n)\geq\eta)\leq\mathbb{P}(\omega(Y_n,\delta)\geq\eta)+\mathbb{P}(\Delta_n>\delta)\leq 2\varepsilon+\mathbb{P}(\Delta_n>\delta).$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Or quand $n \to \infty$ on a $\mathbb{P}(\Delta_n > \delta) \to 0$ car $\Delta_n \to 0$ p.s. On en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left| Y_n\left(\frac{P(tn)}{n}\right) - Y_n(t) \right| \geq \eta \right) \leq 3\varepsilon,$$

ce qui conclut.

(4) Ceci provient du théorème de Cauchy-Lipschitz global (β est lipschitzienne).

(5) *Première étape.* Vérifions d'abord que que presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que $|\bar{Z}_n(t)| \leq K$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

D'après la question (1), presque sûrement il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que $P(t) \leq a + bt$ pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs, comme β est lipschitzienne, il existe deux constants $A, B > 0$ telles que $|\beta(z)| \leq A + B|z|$ pour $z \in \mathbb{R}$. Alors pour $0 \leq t \leq T$, par définition de Z_n :

$$|\bar{Z}_n(t)| \leq |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + b\int_0^t \beta(\bar{Z}_n(s))\mathrm{d}s \leq |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + b\int_0^t (A + B|\bar{Z}_n(s)|)\mathrm{d}s.$$

On en déduit que

$$|\bar{Z}_n(t)| \leq |\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + bAT + B\int_0^t |\bar{Z}_n(s)|\mathrm{d}s.$$

D'après le lemme de Gronwall, il en découle que pour tout $0 \leq t \leq T$.

$$|\bar{Z}_n(t)| \leq \left(|\bar{Z}_n(0)| + \frac{a}{n} + bAT \right) e^{BT}.$$

Comme $|\bar{Z}_n(0)|$ converge lorsque $n \to \infty$, la quantité de droite est bornée, ce qui conclut la première étape.

Deuxième étape. On montre que presque sûrement il existe $M > 0$ et $L > 0$ tels que pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq |\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0\leq s\leq t} \frac{1}{n}|\hat{P}(nMs)| + L\int_0^t |\bar{Z}_n(s) - z(s)|\mathrm{d}s$$

où on a posé $\hat{P}(t) = P(t) - t$.

En utilisant le fait que $z(t) = z_0 + \int_0^t \beta(z(s))\mathrm{d}s$, on écrit

$$\bar{Z}_n(t) - z(t) = \bar{Z}_n(0) - z_0 + \frac{1}{n}\hat{P}\left(n\int_0^t \beta\left(\bar{Z}_n(s)\right)\mathrm{d}s \right) - \left(\int_0^t \beta(z(s))\mathrm{d}s - \int_0^t \beta\left(\bar{Z}_n(s)\right)\mathrm{d}s \right).$$

Soit $L > 0$ une constante de Lipschitz pour β et $M > 0$ tel que $|\beta(x)| \leq M$ pour tout $0 \leq x \leq K$. Alors pour $0 \leq t \leq T$:

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq |\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0\leq s\leq t} \frac{1}{n}|\hat{P}(nMs)| + L\int_0^t |\bar{Z}_n(s) - z(s)|\mathrm{d}s.$$

Ceci conclut la deuxième étape.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Troisième étape. D'après le lemme de Gronwall, pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$|\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq \left(|\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{n} |\hat{P}(nKs)| \right) e^{Mt}.$$

Donc

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{Z}_n(t) - z(t)| \leq \left(|\bar{Z}_n(0) - z_0| + \sup_{0 \leq s \leq T} \frac{1}{n} |\hat{P}(nMs)| \right) e^{LT},$$

qui tend presque sûrement vers 0 par hypothèse et grâce à la question (1).

Remarque. Ce problème est inspiré du Theorem 5.2 de l'ouvrage Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis (Andersson & Britton).

□

Fin