Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

# Devoir maison

*À rendre individuellement le mardi 9 novembre (rendu papier ou rendu électronique). Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté.*

## Exercice 1.

Pour $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on note $\sup(x) = \sup_{i \geq 1} x_i$.

(1) Soit $X, X^1, X^2, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (muni de la tribu et de la distance définies dans le cours 2) telles que $X^n \Rightarrow X$. Alexandra dit : on a alors $\sup(X^n) \Rightarrow \sup(X)$. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

(2) On considère $\ell^1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$, muni de la distance $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$ et de la tribu borélienne associée. Soit $X, X^1, X^2, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\ell^1$ telles que $X^n \Rightarrow X$. Béatrice dit : on a alors $\sup(X^n) \Rightarrow \sup(X)$. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

## Exercice 2.

Soit $(E, d)$ un espace métrique et notons $d_{LP}$ la distance de Lévy-Prokhorov sur $E$.

(1) Montrer que

$$d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 : \forall F \text{ fermé de } E, \mu(F) \leq \nu(F^r) + r\}$$

où $F^r = \{x \in E : d(x, F) < r\}$.

(2) Que se passe-t-il si on remplace "fermé" par "ouvert" ? Autrement dit, a-t-on

$$d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 : \forall O \text{ ouvert de } E, \mu(O) \leq \nu(O^r) + r\} ?$$

## Exercice 3.

Soit $\mu$ une mesure de probabilité tendue sur un espace métrique $(E, d)$. Montrer qu'il existe un borélien $A \subset E$ avec $(A, d)$ séparable et $\mu(A) = 1$.

## Exercice 4.

Soit $(E, d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans $E$. On suppose que $(\delta_{x_n})_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire $X$. Que dire de $X$ ?

## Exercice 5.

Considérons une suite $(E_n, d_n)_{n \geq 1}$ d'espaces métriques munis de leurs tribus boréliennes. Pour tout $n \geq 1$, soit $\mu_n$ une mesure de probabilité sur $E_n$, et $(X_n(k))_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $E_n$ de loi $\mu_n$.

On note $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} = \{(a_{i,j})_{i,j\geq 1} : a_{i,j} \in \mathbb{R} \text{ pour } i,j \geq 1\}$ l'ensemble des matrices réelles "infinies", muni de la distance

$$d\Big((a_{i,j})_{i,j\geq 1}, (b_{i,j})_{i,j\geq 1}\Big) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{|a_{i,j}-b_{i,j}|}{|a_{i,j}-b_{i,j}|+1} \times \frac{1}{2^{i+j}}$$

et de sa tribu borélienne associée.

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $\Big((d_n(X_n(i), X_n(j))_{i,j\geq 1}\Big)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R})$ ;

(ii) la suite $(d_n(X_n(1), X_n(2)))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$ ;

(iii) pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in E_n$ tel que la suite $(d_n(x_n, X_n(1)))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$.

# Exercice 6.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1])$, l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. On suppose qu'il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que

$$\forall 0 \leq s,t \leq 1, \quad \mathbb{E}[(X_1(s)-X_1(t))^2] \leq C|s-t|^{1+\varepsilon}, \qquad \forall 0 \leq s \leq 1, \quad \mathbb{E}[X_1(s)] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X_1(s)^2] < \infty.$$

On pose

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

(1) Pour $0 \leq s,t \leq 1$, calculer $\mathbb{E}[(Z_n(s)-Z_n(t))^2]$.

(2) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1])$.

# Petit problème.

On considère $\mathbb{U} = \cup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n$, où $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\varnothing\}$ par convention. Un élément $u \in \mathbb{U}$ est ainsi une suite finie d'entiers strictement positifs, appelé aussi mot. Si $u \in (\mathbb{N}^*)^n$, on note $|u| = n$ sa longueur. On définit $\partial\mathbb{U} = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ et on pose $\overline{\mathbb{U}} = \mathbb{U} \cup \partial\mathbb{U}$. Pour $u \in \mathbb{U}$ et $v \in \overline{\mathbb{U}}$, on note $uv$ la concaténation de $u$ et de $v$ (en particulier $\varnothing u = u\varnothing$ pour tout mot $u$), et on note $u \preceq uv$.

Pour $u, v \in \overline{\mathbb{U}}$ avec $u \neq v$, on note $u \wedge v \in \mathbb{U}$ le plus long mot pour lequel il existe $x, y \in \overline{\mathbb{U}}$ tels que $u = (u\wedge v)x$ et $v = (u \wedge v)y$. On pose enfin $u \wedge u = u$.

(1) On définit pour $u, v \in \overline{\mathbb{U}}$ :

$$d(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = v, \\ e^{-|u\wedge v|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $d$ est une distance sur $\overline{\mathbb{U}}$ qui vérifie $d(u,w) \leq \max(d(u,v), d(v,w))$ pour tous $u,v,w \in \overline{\mathbb{U}}$ et qui rend cet espace polonais.

(2) Montrer que dans $\overline{\mathbb{U}}$ les boules ouvertes sont fermées.

(3) Pour $u \in \mathbb{U}$, on note $T(u) = \{uv : v \in \overline{\mathbb{U}}\}$. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesure de probabilités sur $\overline{\mathbb{U}}$ muni de sa tribu borélienne. Montrer que $(\mu)_{n\geq 1}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité $\mu$ sur $\overline{\mathbb{U}}$ si et seulement si pour tout $u \in \mathbb{U}$,

$$\mu_n(\{u\}) \to \mu(\{u\}) \qquad \text{et} \qquad \mu_n(T(u)) \to \mu(T(u)).$$