Page du cours : http://www.cmap.polytechnique.fr/~kortchemski/M2/ Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Devoir maison

À rendre individuellement le vendredi 6 novembre à 14h (rendu papier ou rendu électronique). Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté.

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables sur le même espace de probabilité.

(1) Montrer que si pour toute extraction ϕ il existe une extraction ψ telle que $(X_{\phi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ converge dans L_1, alors $(X_n)_{\geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé :

(1) Raisonnons par l'absurde en supposant que $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniformément intégrable. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $x_n \to \infty$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{i\geq 1} \mathbb{E}\left[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geq x_n}\right] \geq \varepsilon.$$

Ainsi, il existe une extraction ϕ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[|X_{\phi(n)}|\mathbb{1}_{|X_{\phi(n)}|\geq x_n}\right] \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Considérons une extraction ψ telle que la suite $(X_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ converge dans L_1. Alors d'après le cours la suite $(X_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable, ce qui contredit (1).

(2) Non. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Ètant une suite de variables aléatoires bornées par 1, elle est bien uniformément intégrable. Par l'absurde, supposons l'existence d'une extraction Ψ telle que la suite $(X_{\psi(n)})_{n\geq 1}$ converge dans L_1. Alors cette suite est de Cauchy dans L_1. Or pour $p \neq q$:

$$\mathbb{E}[|X_{\psi(p)} - X_{\psi(q)}|] = \mathbb{P}\left(X_{\psi(p)} \neq X_{\psi(q)}\right) = \frac{1}{2}.$$

Absurde.

□

Exercice 2.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace polonais (E, d).

(1) (a) Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, alors pour toute extraction ϕ, pour presque tout $\omega \in \Omega$ il existe une extraction ψ_ω telle que la suite $(X_{\phi(\psi_\omega(n))}(\omega))_{n\geq 1}$ converge.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

(2) On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans un compact K et que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Montrer qu'il existe un élement (déterministe) $x \in K$ tel que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe une extraction ϕ_ω telle que la suite $(X_{\phi_\omega(n)}(\omega))_{n\geq 1}$ converge vers x.

(3) Est-il vrai que si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, alors pour toute extraction ϕ, il existe une extraction ψ telle que la suite $(X_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement ?

Corrigé :

(1) (a) Quitte à travailler avec $X_{\phi(n)}$ à la place de X_n, on peut supposer que ϕ est l'identité. On va montrer que presque sûrement, $(X_n)_{n\geq 1}$ prend une infinité de fois ses valeurs dans un compact.

Étape 1. D'après le théorème de Prokhorov, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue. Pour tout $i \geq 1$, il existe donc un compact K_i tel que

$$\inf_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \in K_i) \geq 1 - \frac{1}{i}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite $(K_i)_{i\geq 1}$ est croissante. Vérifions que

$$\mathbb{P}(\forall M > 1, \exists i_0 > 1, \forall i \geq 1, i \geq i_0 \implies X_i \notin K_M) = 0. \tag{2}$$

Pour cela, remarquons que

$$\{\forall M > 1, \exists i_0 > 1, \forall i \geq 1, i \geq i_0 \implies X_i \notin K_M\} = \bigcap_{M>1} \bigcup_{i_0>1} \bigcap_{i\geq i_0} \{X_i \notin K_M\}.$$

Remarquons que la première intersection est décroissante et que la seconde union est croissante. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\forall M > 1, \exists i_0 > 1, \forall i \geq 1, i \geq i_0 \implies X_i \notin K_M) = \lim_{M\to\infty} \lim_{i_0\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\geq i_0} \{X_i \notin K_M\}\right).$$

Or

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\geq i_0} \{X_i \notin K_M\}\right) \leq \mathbb{P}\left(X_{i_0} \notin K_M\right) \leq \frac{1}{M}.$$

Ceci démontre (2).

Étape 2. Ainsi, presque sûrement, il existe $M > 1$ tel que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ prend une infinité de valeurs dans le compact K_M. Le résultat désiré en découle d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

(b) C'est vrai si $\mathrm{Card}(E) \leq 1$. C'est faux sinon : si $x, y \in E$ avec $x \neq y$, on prend par exemple $X_n = x$ si n est pair et $X_n = y$ si n est impair.

(2) On recouvre le compact K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $1/2$. Alors presque sûrement, il existe alors un compact de la forme $K_1 = \overline{B}_1(x_1, 1) \cap K$ et une extraction $\psi_{1,\omega}$ telle que $X_{\psi_{1,\omega}(n)} \in \overline{B}_1(x_1, 1)$ pour tout $n \geq 1$. Par récurrence, on construit une suite décroissante (déterministe) de compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ tels que K_n est contenu dans une boule de rayon $1/2^{n-1}$ et des extractions $(\psi_{n,\omega})_{n\geq 1}$ telles que pour tout $k \geq 1$ et tout $n \geq 1$, $X_{\psi_{1,\omega}\circ\cdots\circ\psi_{k,\omega}(n)} \in B_k$. La suite $(K_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0 dans un espace complet : d'après le théorème des fermés emboités il existe donc $x \in K$ tel que

$$\bigcap_{n\geq 1} K_n = \{x\}.$$

Par procédé diagonal, en posant $\phi_\omega(n) = \psi_{1,\omega} \circ \cdots \circ \psi_{n,\omega}(n)$, on en déduit que presque sûrement la suite $(X_{\phi_\omega(n)}(\omega))_{n\geq 1}$ converge vers x.

(3) Rappelons que X_n converge en probabilité vers X si et seulement si de toute sous-suite on peut ré-extraire une sous-suite qui converge presque sûrement vers X, et que la convergence en loi et la convergence en probabilité vers une constante sont équivalentes.

En particulier, la réponse à la question est affirmative si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une constante.

Elle est négative sinon. En effet, considérons une variable aléatoire X dont la loi n'est pas une masse de Dirac et soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables i.i.d. de même loi que X. Ainsi, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une extraction ψ telle que la suite $(X_{\psi(n)})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire notée Y. Pour simplifier les notations, posons $Y_n = X_{\psi(n)}$. Alors a fortiori $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y, donc X et Y ont même loi, notée μ.

Vérifions que si K est un compact tel que $\mu(K) > 0$, alors $\mu(K) = 1$. Pour raisonnons par l'absurde en supposant $\mu(K^c) < 1$. Par régularité et tension de la loi de X, on a

$$\mu(K^c) = \sup\{\mu(C) : C \subset K^c \text{ et } C \text{ compact}\}.$$

Il existe donc un compact C tel que $K \cap C = \varnothing$ et $\mu(C) > 0$. Mais alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \in K) = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \in C) = \infty.$$

Les variables aléatoires (Y_n) étant indépendantes, on en déduit que presque sûrement Y_n appartient à K une infinité de fois et à C une infinité de fois, ce qui contredit le fait que Y_n converge presque sûrement car $C \cap K = \varnothing$.

Comme dans la question précédente, on construit une suite décroissante de compacts dont le diamètre tend vers 0 et dont la μ-mesure vaut 1. En notant $\{x\}$ leur intersection, on en déduit que $\mu(\{x\}) = 1$, ce qui contredit le fait que X est non constante.

□

Problème

Dans tout le problème, il est possible d'admettre le résultat d'une question pour l'utiliser dans une question ultérieure.

Première partie. Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur un espace métrique E muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$, leur distance en variation totale est définie par

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu,\nu) = \sup_{A\in\mathcal{B}(E)} |\mu(A)-\nu(A)|.$$

(1) Montrer que si $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu_n,\mu) \to 0$, alors $\mu_n \Rightarrow \mu$. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Soit ρ une mesure finie sur $(E,\mathcal{B}(E))$ telle que μ et ν soient absolument continues par rapport à ρ. On note $f = \frac{d\mu}{d\rho}$ et $g = \frac{d\nu}{d\rho}$, $\lambda = \mu-\nu$ et $h = f-g$.

   (a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$ on a $|\lambda(A)| = \frac{1}{2}\left(\left|\int_A h d\rho\right| + \left|\int_{A^c} h d\rho\right|\right)$.

   (b) Montrer que $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\int_E |f-g| d\rho$.

(3) Montrer que

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\sup\{|\mu(F)-\nu(F)| : F : E \to \mathbb{R}, \text{ mesurable}, \|F\|_\infty \le 1\}.$$

Corrigé :

(1) Si $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu_n,\mu) \to 0$, a fortiori $\mu_n(A) \to \mu(A)$ pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(E)$ tel que $\mu(\partial A) = 0$, de sorte que $\mu_n \Rightarrow \mu$ d'après le théorème de Porte-Manteau.

(2) (a) Puisque $\lambda(A)+\lambda(A^c) = 0$ on en déduit que

$$|\lambda(A)| = \frac{1}{2}(|\lambda(A)|+|\lambda(A^c)|) = \frac{1}{2}\left(\left|\int_A h d\rho\right| + \left|\int_{A^c} h d\rho\right|\right)$$

   (b) Tout d'abord,

$$\left|\int_A h d\rho\right| + \left|\int_{A^c} h d\rho\right| \le \int_A |h| d\rho + \int_{A^c} |h| d\rho \le \int |h| d\rho,$$

   de sorte que

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu,\nu) \le \frac{1}{2}\int_E |f-g| d\rho.$$

   Pour l'autre sens, on prend simplement $A = \{h > 0\}$ et on vérifie que

$$|\lambda(A)| = \frac{1}{2}\int |h| d\rho.$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(3) On prend $\rho = \mu + \nu$. Alors, si $\|F\|_\infty \le 1$:

$$|\mu(F) - \nu(F)| = \left| \int F(f-g) d\rho \right| \le \int |F||f-g| d\rho \le \int |f-g| d\rho = 2\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu,\nu),$$

où la dernière égalité provient de la question précédente.

Pour l'autre inégalité, on remarque que si $A \in \mathcal{B}(E)$ et $F = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A^c}$, on a

$$\mu(A) - \nu(A) = \frac{1}{2}\left((\mu(A)-\nu(A)) - (\mu(A^c) - \nu(A^c))\right) = \frac{1}{2}(\mu(F) - \nu(F)).$$

Ceci montre que

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu,\nu) \le \frac{1}{2} \sup\{|\mu(F) - \nu(F)| : F : E \to \mathbb{R}, \text{ mesurable}, \|F\|_\infty \le 1\}.$$

□

Dans la suite, (E,d) est un espace polonais et $\mathcal{M}_1(E)$ est muni de la topologie de la convergence étroite (par exemple avec la distance d_{LP}) qui en fait un espace polonais.

Deuxième partie.

(4) Montrer qu'un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(E))$ est tendu si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que

$$\forall \Pi \in \mathcal{A}, \qquad \Pi(\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) : \mu(K^c) > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Soit $(X_i)_{i \ge 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans E. On dit que le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est échangeable si pour toute bijection $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ les vecteurs $(X_1,\ldots,X_n)$ et $(X_{f(1)},\ldots,X_{f(n)})$ ont même loi.

(5) On pose

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k}.$$

Vérifier que M_n est bien une variable aléatoire (c'est-à-dire $(\mathcal{M}_1(E), \mathcal{B}(\mathcal{M}_1(E)))$ mesurable) et montrer que la suite $(M_n)_{n \ge 1}$ est tendue.

Corrigé :

(4) $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(E))$ une partie tendue. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la tension, il existe un compact C de $\mathcal{M}_1(E)$ tel que

$$\sup_{\Pi \in \mathcal{A}} \Pi(C^c) < \varepsilon.$$

Puisque C est un compact de $\mathcal{M}_1(E)$, C est tendu est donc il existe un compact $K \subset E$ tel que

$$\sup_{\mu \in C} \mu(K^c) \le \varepsilon.$$

Or $\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) : \mu(K^c) > \varepsilon\} \subset C^c$, ce qui montre que

$$\forall \Pi \in \mathcal{A}, \qquad \Pi(\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) : \mu(K^c) > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, fixons $\varepsilon > 0$ et considérons un compact K_n tel que

$$\sup_{\Pi \in \mathcal{A}} \Pi\left(\left\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) : \mu(K_n^c) \geq \frac{\varepsilon}{2^n}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Posons alors

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) : \mu(K_n^c) < \frac{\varepsilon}{2^n}\right\}.$$

On vérifie avec le théorème de porte-manteau que chacun des ensembles dans l'intersection est fermé, de sorte que $\mathcal{C}$ est fermé. On conclut que $\mathcal{C}$ est compact d'après le théorème de Prokhorov, car toute mesure de $\mathcal{C}$ est tendue.

Mais par construction

$$\Pi(\mathcal{C}^c) \leq \varepsilon$$

pour tout $\Pi \in \mathcal{A}$, ce qui conclut.

(5) Pour tout $1 \leq k \leq n$, δ_{X_k} est bien mesurable, comme composition des applications $x \mapsto \delta_x$ et $\omega \mapsto X_k(\omega)$, qui sont mesurables (la première par continuité, la seconde car X_k est une variable aléatoire), ce qui qui montre que M_n est bien mesurable.

Pour montrer que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ est tendue, d'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$ il s'agit de trouver un compact $K \subset E$ tel que

$$\mathbb{P}(M_n(K^c) > \varepsilon) < \varepsilon.$$

Mais d'après l'inégalité de Markov, pour un compact K,

$$\mathbb{P}(M_n(K^c) > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[M_n(K^c)].$$

Or par échangeabilité, $\mathbb{E}[M_n(K^c]) = \mathbb{P}(X_1 \in K^c)$. Par tension de X_1, on peut trouver un compact K tel que $\mathbb{P}(X_1 \in K^c) \leq \varepsilon^2$. On a alors bien

$$\mathbb{P}(M_n(K^c) > \varepsilon) < \varepsilon.$$

□

Troisième partie. Pour une suite $x = (x_i)_{i \geq 1}$ à valeurs dans E, on considère les mesures

$$\mu_{n,k}(x) = \frac{1}{n^k} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \delta_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}}, \qquad \nu_{n,k}(x) = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1 \\ \#\{i_1,\ldots,i_k\}=k}}^{n} \delta_{(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}$$

sur E^k.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(6) Montrer que

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu_{n,k}(x), \nu_{n,k}(x)) \leq \frac{2k(k-1)}{n}.$$

Corrigé :

(6) Pour simplifier les notations, posons $\mu = \mu_{n,k}(x)$ et $\nu = \nu_{n,k}(x)$. Notons $E_n = \{x_1, \dots, x_n\}$, de sorte que les supports de μ et ν sont inclus dans E_n^k. Considérons l'événement $D \subset E_n^k$ défini par

$$D = \{(y_1, \dots, y_k) \in E_n^k : \#\{y_1, \dots, y_k\} = k\}.$$

Pour $A \subset E_n^k$, on écrit alors

$$|\mu(A) - \nu(A)| \leq |\mu(A \cap D) - \nu(A \cap D)| + \mu(A \backslash D) + \nu(A \backslash D).$$

D'une part

$$|\mu(A \cap D) - \nu(A \cap D)| = \#(A \cap D) \left| \frac{1}{n^k} - \frac{(n-k)!}{k!} \right| \leq \#D \left| \frac{1}{n^k} - \frac{(n-k)!}{k!} \right| = 1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

D'autre part,

$$\mu(A \backslash D) \leq 1 - \mu(D) = 1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

Enfin, $\nu(A \backslash D) = 0$. On conclut en écrivant

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k \geq 1 - \frac{(k-1)k}{n}.$$

□

Quatrième partie. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans E. On suppose qu'elles sont échangeables, c'est-à-dire que pour toute bijection $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\#\{k \geq 1 : f(k) \neq k\} < \infty$ les deux suites $(X_i)_{i \geq 1}$ et $(X_{f(i)})_{i \geq 1}$ ont même loi.

Soit $f_1, \dots, f_k \in C_b(E)$.

(7) Montrer que

$$\left| \mathbb{E}[f_1(X_1) \cdots f_k(X_k)] - \mathbb{E}\left[\int f_1 \mathrm{d}M_n \cdots \int f_k \mathrm{d}M_n \right] \right| \quad \xrightarrow[n \to \infty]{} \quad 0.$$

(8) Montrer qu'il existe une variable aléatoire M à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}[f_1(X_1) \cdots f_k(X_k)] = \mathbb{E}\left[\int f_1 \mathrm{d}M \cdots \int f_k \mathrm{d}M \right].$$

Ainsi, il existe une mesure aléatoire M telle que conditionnellement à M, les variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ sont i.i.d. de loi M (c'est le théorème de De Finetti)

Corrigé :

(7) On remarque que

$$f_1(X_1)\cdots f_k(X_k)=\int F d\nu_{n,k}(X), \qquad \int f_1 \mathrm{d}M_n \cdots \int f_k \mathrm{d}M_n = \int F d\mu_{n,k}(X),$$

où la première égalité provient de l'échangeabilité. D'après la question (3),

$$\left|\mathbb{E}[f_1(X_1)\cdots f_k(X_k)] - \mathbb{E}\left[\int f_1 \mathrm{d}M_n \cdots \int f_k \mathrm{d}M_n\right]\right| \leq \|F\|_\infty \frac{k(k-1)}{n} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

(8) D'après la question (5), la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est tendue. Considérons une extraction ϕ telle que $M_{\phi(n)}$ converge en loi vers M dans $\mathcal{M}_1(E)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1(E) & \to & \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \int f_1 \mathrm{d}m \cdots \int f_k \mathrm{d}m \end{array}$$

est continue bornée car $f_1, \ldots, f_k \in C_b(E)$. On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\int f_1 \mathrm{d}M_{\phi(n)} \cdots \int f_k \mathrm{d}M_{\phi(n)}\right] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}\left[\int f_1 \mathrm{d}M \cdots \int f_k \mathrm{d}M\right].$$

Avec la question précédente, on conclut que

$$\mathbb{E}[f_1(X_1)\cdots f_k(X_k)] = \mathbb{E}\left[\int f_1 \mathrm{d}M \cdots \int f_k \mathrm{d}M\right].$$

□