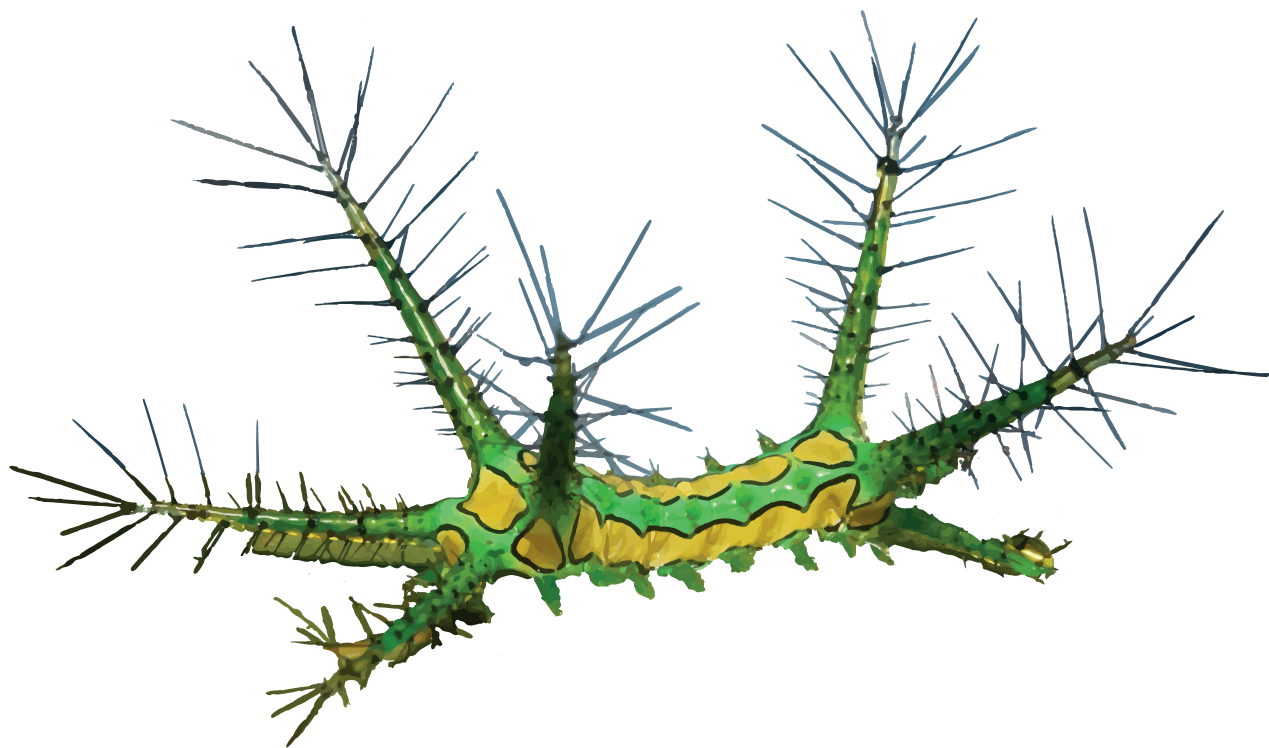
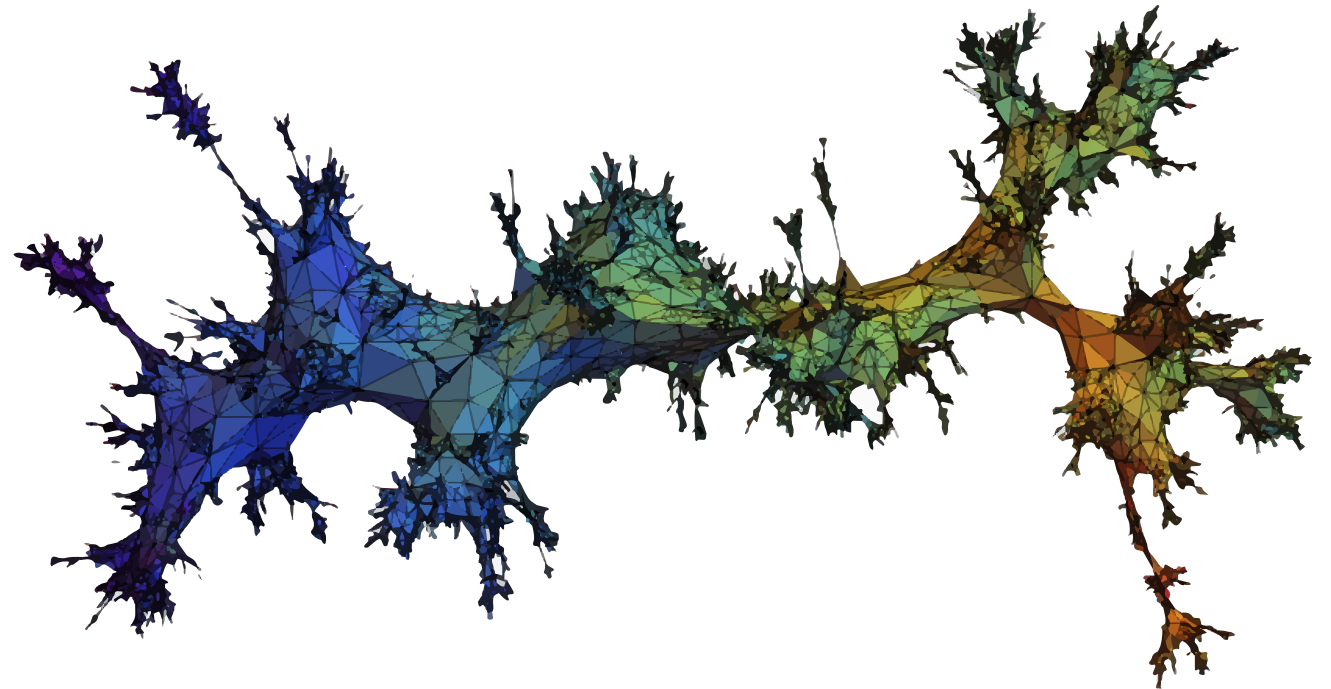


L'Univers Brownien



Chenille Limacodidae ©John Horstman



Sphère brownienne ©Igor Kortchemski

Igor Kortchemski

CNRS & DMA

GL : Arbres, marches et graphes aléatoires – ENS Paris – 2025 - 2026

Un rêve...

Un rêve...

Je me suis endormi sur le sable à mille milles de toute terre habitée. J'étais bien plus isolé qu'un naufragé sur un radeau au milieu de l'Océan.

Un rêve...

Je me suis endormi sur le sable à mille milles de toute terre habitée. J'étais bien plus isolé qu'un naufragé sur un radeau au milieu de l'Océan. Vous imaginez ma surprise, au lever du jour, quand une drôle de petite voix m'a réveillé.

Un rêve...

Je me suis endormi sur le sable à mille milles de toute terre habitée. J'étais bien plus isolé qu'un naufragé sur un radeau au milieu de l'Océan. Vous imaginez ma surprise, au lever du jour, quand une drôle de petite voix m'a réveillé. Elle disait :

– S'il vous plaît... dessine-moi une fonction au hasard !

Un rêve...

Je me suis endormi sur le sable à mille milles de toute terre habitée. J'étais bien plus isolé qu'un naufragé sur un radeau au milieu de l'Océan. Vous imaginez ma surprise, au lever du jour, quand une drôle de petite voix m'a réveillé. Elle disait :

- S'il vous plaît... dessine-moi une fonction au hasard !
- Hein !

Un rêve...

Je me suis endormi sur le sable à mille milles de toute terre habitée. J'étais bien plus isolé qu'un naufragé sur un radeau au milieu de l'Océan. Vous imaginez ma surprise, au lever du jour, quand une drôle de petite voix m'a réveillé. Elle disait :

- S'il vous plaît... dessine-moi une fonction au hasard !
- Hein !
- Dessine-moi une fonction au hasard ...

Un rêve...

J'ai sauté sur mes pieds comme si j'avais été frappé par la foudre. J'ai bien frotté mes yeux. J'ai bien regardé. Et j'ai vu un petit bonhomme tout à fait extraordinaire qui me considérait gravement.

Un rêve...

J'ai sauté sur mes pieds comme si j'avais été frappé par la foudre. J'ai bien frotté mes yeux. J'ai bien regardé. Et j'ai vu un petit bonhomme tout à fait extraordinaire qui me considérait gravement.

– Mais... qu'est-ce que tu fais là ?

Un rêve...

J'ai sauté sur mes pieds comme si j'avais été frappé par la foudre. J'ai bien frotté mes yeux. J'ai bien regardé. Et j'ai vu un petit bonhomme tout à fait extraordinaire qui me considérait gravement.

– Mais... qu'est-ce que tu fais là ?

Et il me répéta alors, tout doucement, comme une chose très sérieuse :

Un rêve...

J'ai sauté sur mes pieds comme si j'avais été frappé par la foudre. J'ai bien frotté mes yeux. J'ai bien regardé. Et j'ai vu un petit bonhomme tout à fait extraordinaire qui me considérait gravement.

– Mais... qu'est-ce que tu fais là ?

Et il me répéta alors, tout doucement, comme une chose très sérieuse :

– S'il vous plaît... dessine-moi une fonction au hasard...

Un rêve...

Quand le mystère est trop impressionnant, on n'ose pas désobéir. Aussi absurde que cela me semblât à mille milles de tous les endroits habités et en danger de mort, je sortis de ma poche une feuille de papier et un stylo.

Un rêve...

Quand le mystère est trop impressionnant, on n'ose pas désobéir. Aussi absurde que cela me semblât à mille milles de tous les endroits habités et en danger de mort, je sortis de ma poche une feuille de papier et un stylo.

Mais je me rappelai alors qu'à l'ENS Paris j'avais surtout étudié la géographie, l'histoire, le calcul et la grammaire,

Un rêve...

Quand le mystère est trop impressionnant, on n'ose pas désobéir. Aussi absurde que cela me semblât à mille milles de tous les endroits habités et en danger de mort, je sortis de ma poche une feuille de papier et un stylo.

Mais je me rappelai alors qu'à l'ENS Paris j'avais surtout étudié la géographie, l'histoire, le calcul et la grammaire, mais pas les probabilités,

Un rêve...

Quand le mystère est trop impressionnant, on n'ose pas désobéir. Aussi absurde que cela me semblât à mille milles de tous les endroits habités et en danger de mort, je sortis de ma poche une feuille de papier et un stylo.

Mais je me rappelai alors qu'à l'ENS Paris j'avais surtout étudié la géographie, l'histoire, le calcul et la grammaire, mais pas les probabilités, et je dis au petit bonhomme (avec un peu de mauvaise humeur) que je ne savais pas dessiner au hasard.

Un rêve...

Quand le mystère est trop impressionnant, on n'ose pas désobéir. Aussi absurde que cela me semblât à mille milles de tous les endroits habités et en danger de mort, je sortis de ma poche une feuille de papier et un stylo.

Mais je me rappelai alors qu'à l'ENS Paris j'avais surtout étudié la géographie, l'histoire, le calcul et la grammaire, mais pas les probabilités, et je dis au petit bonhomme (avec un peu de mauvaise humeur) que je ne savais pas dessiner au hasard. Il me répondit :

Un rêve...

Quand le mystère est trop impressionnant, on n'ose pas désobéir. Aussi absurde que cela me semblât à mille milles de tous les endroits habités et en danger de mort, je sortis de ma poche une feuille de papier et un stylo.

Mais je me rappelai alors qu'à l'ENS Paris j'avais surtout étudié la géographie, l'histoire, le calcul et la grammaire, mais pas les probabilités, et je dis au petit bonhomme (avec un peu de mauvaise humeur) que je ne savais pas dessiner au hasard. Il me répondit :

– Ça ne fait rien.

Un rêve...

Quand le mystère est trop impressionnant, on n'ose pas désobéir. Aussi absurde que cela me semblât à mille milles de tous les endroits habités et en danger de mort, je sortis de ma poche une feuille de papier et un stylo.

Mais je me rappelai alors qu'à l'ENS Paris j'avais surtout étudié la géographie, l'histoire, le calcul et la grammaire, mais pas les probabilités, et je dis au petit bonhomme (avec un peu de mauvaise humeur) que je ne savais pas dessiner au hasard. Il me répondit :

– Ça ne fait rien. Dessine-moi une fonction au hasard.

Un rêve...

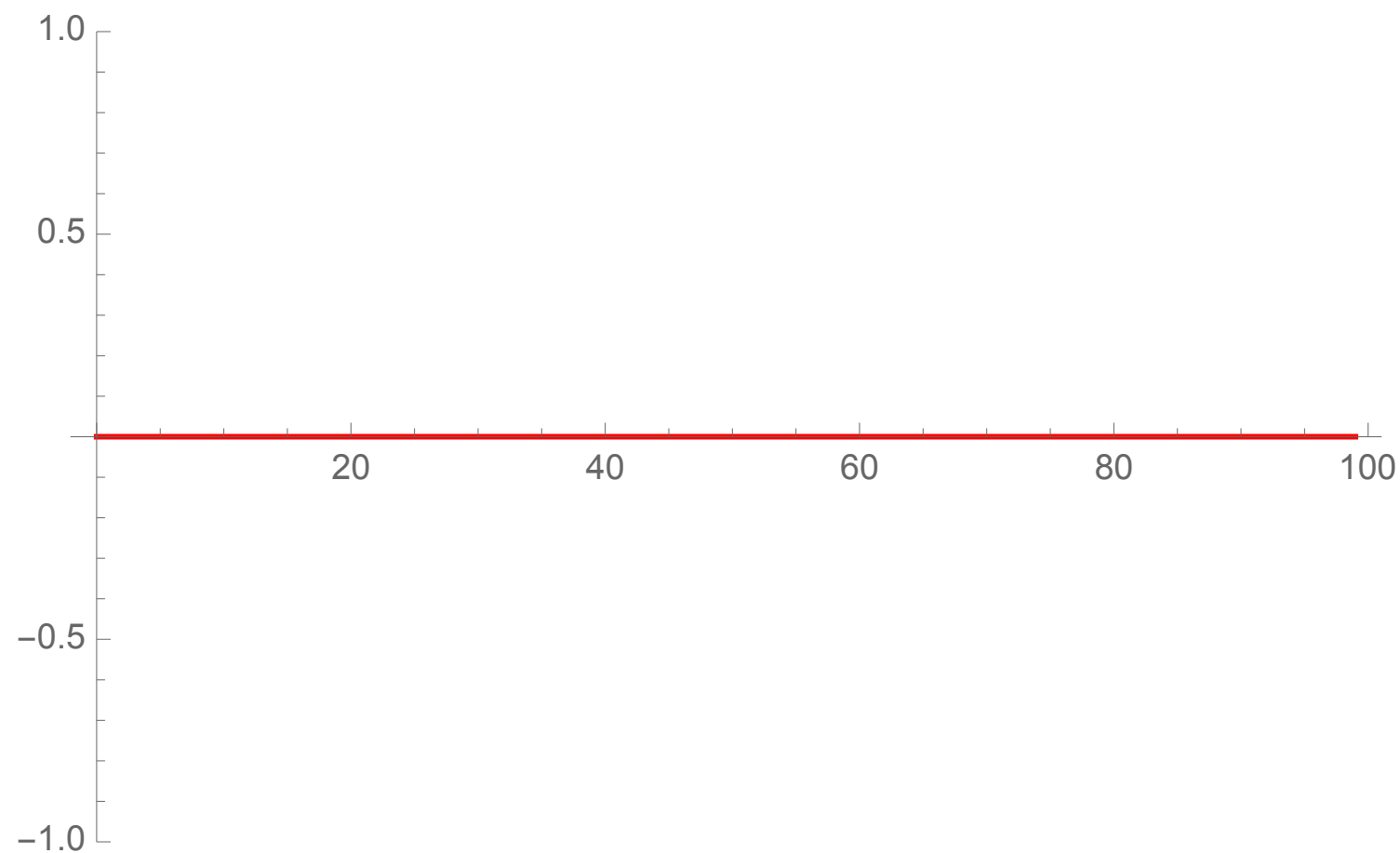
Comme je n'avais jamais dessiné de fonction au hasard je fis, pour lui, l'un des deux seuls dessins dont j'étais capable.

Un rêve...

Comme je n'avais jamais dessiné de fonction au hasard je fis, pour lui, l'un des deux seuls dessins dont j'étais capable. Celui de la fonction nulle.

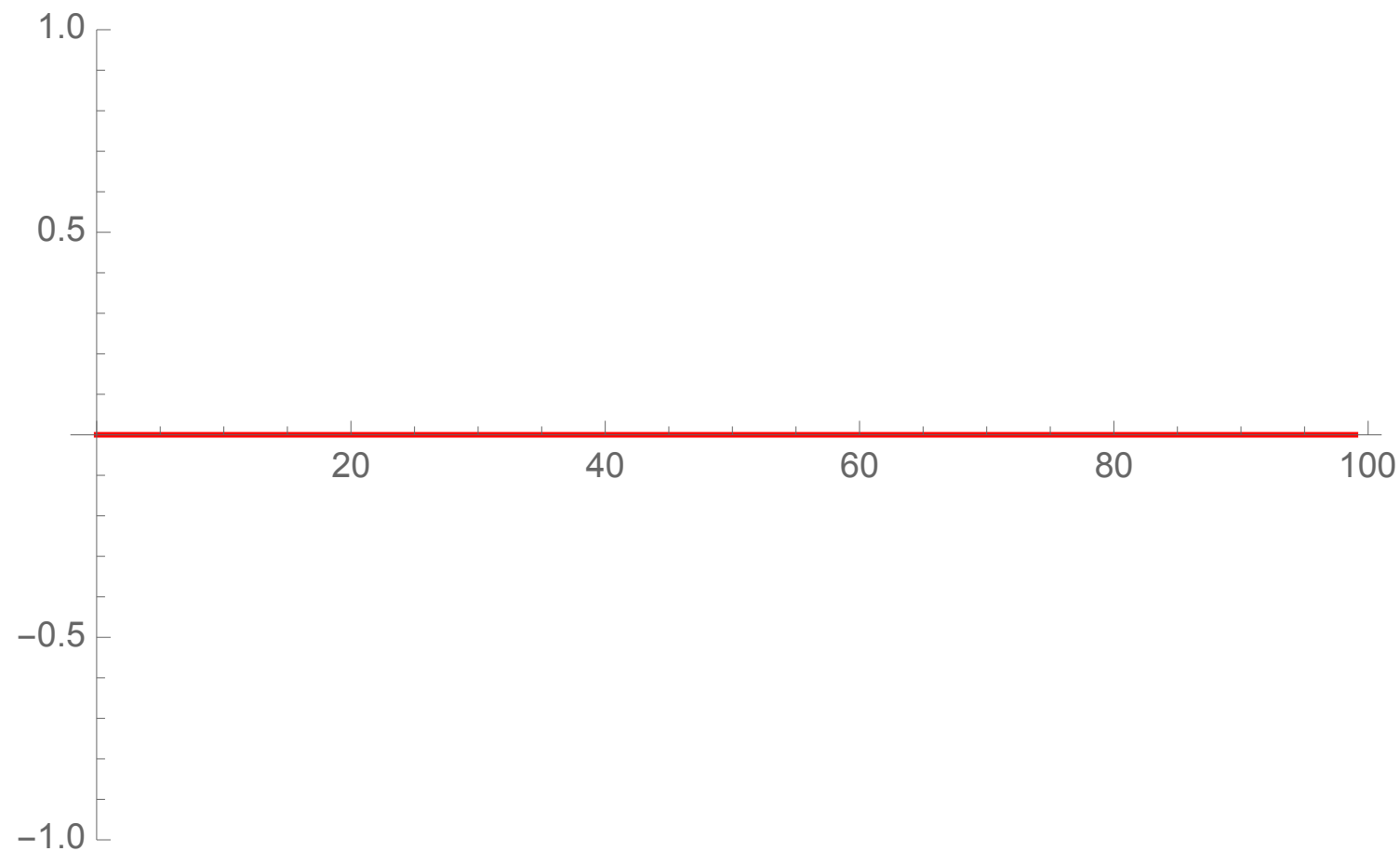
Un rêve...

Comme je n'avais jamais dessiné de fonction au hasard je fis, pour lui, l'un des deux seuls dessins dont j'étais capable. Celui de la fonction nulle.



Un rêve...

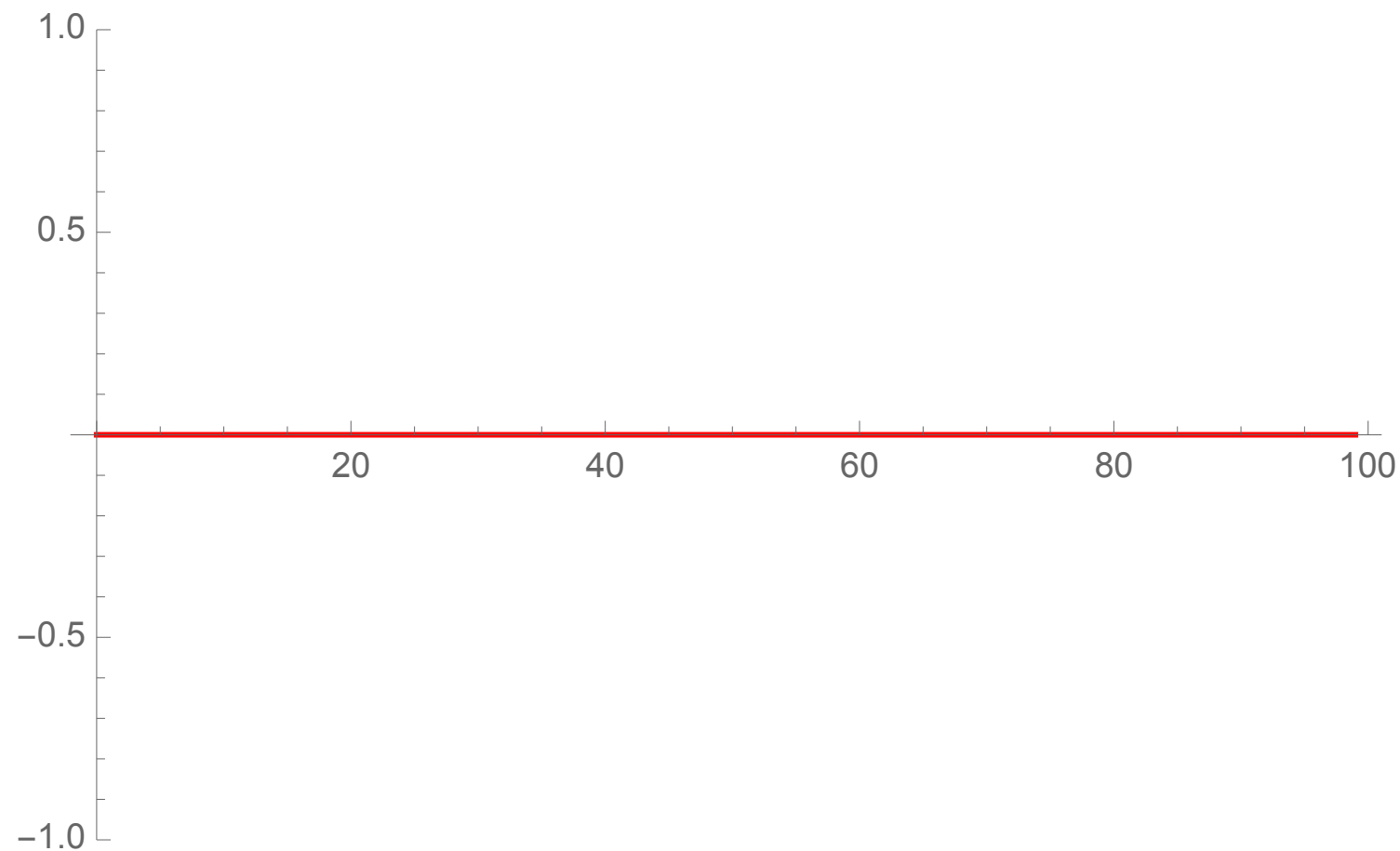
Comme je n'avais jamais dessiné de fonction au hasard je fis, pour lui, l'un des deux seuls dessins dont j'étais capable. Celui de la fonction nulle.



– Non ! Non ! Je ne veux pas d'une fonction qui ne bouge pas.

Un rêve...

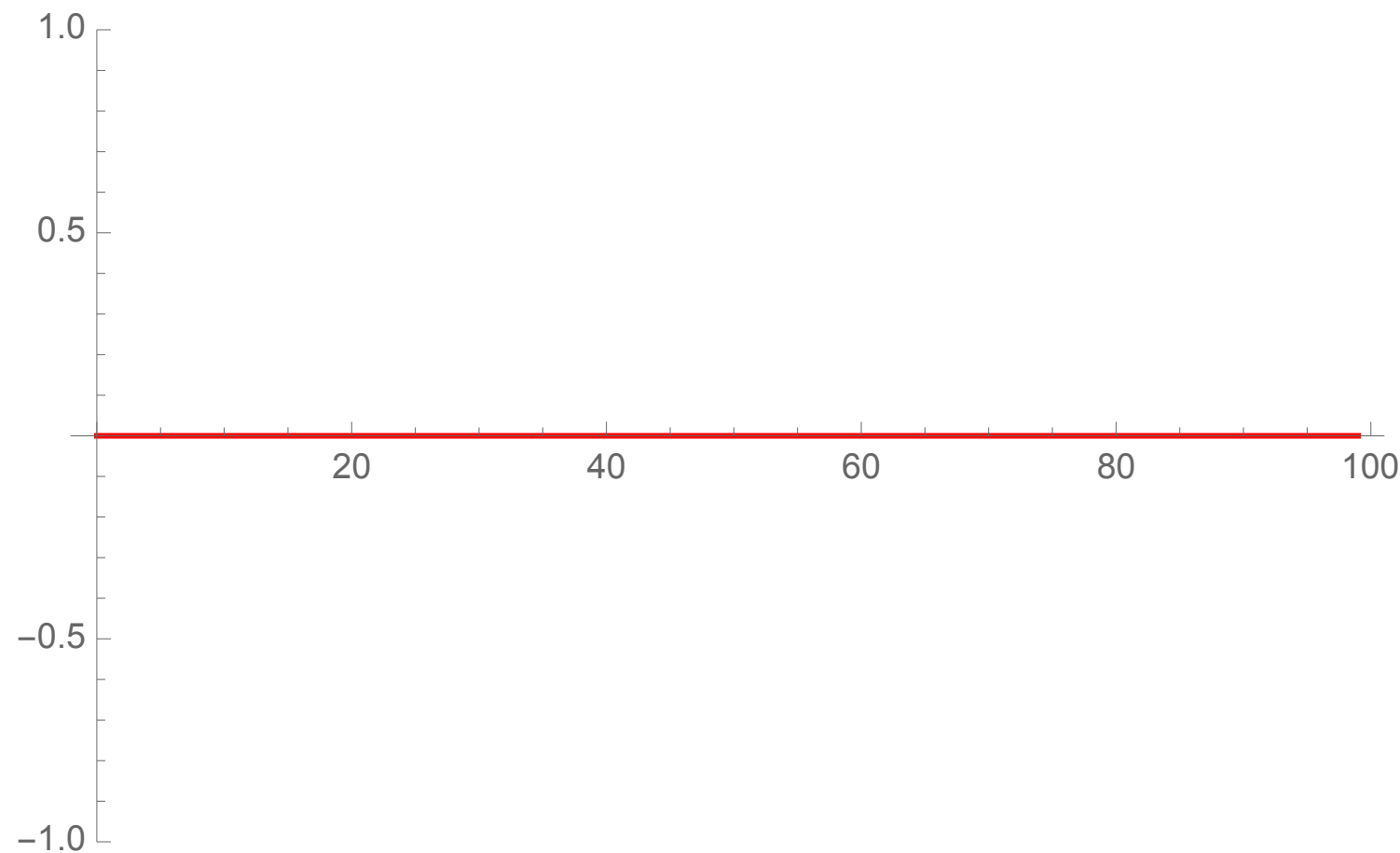
Comme je n'avais jamais dessiné de fonction au hasard je fis, pour lui, l'un des deux seuls dessins dont j'étais capable. Celui de la fonction nulle.



– Non ! Non ! Je ne veux pas d'une fonction qui ne bouge pas. J'ai besoin d'une fonction aléatoire.

Un rêve...

Comme je n'avais jamais dessiné de fonction au hasard je fis, pour lui, l'un des deux seuls dessins dont j'étais capable. Celui de la fonction nulle.



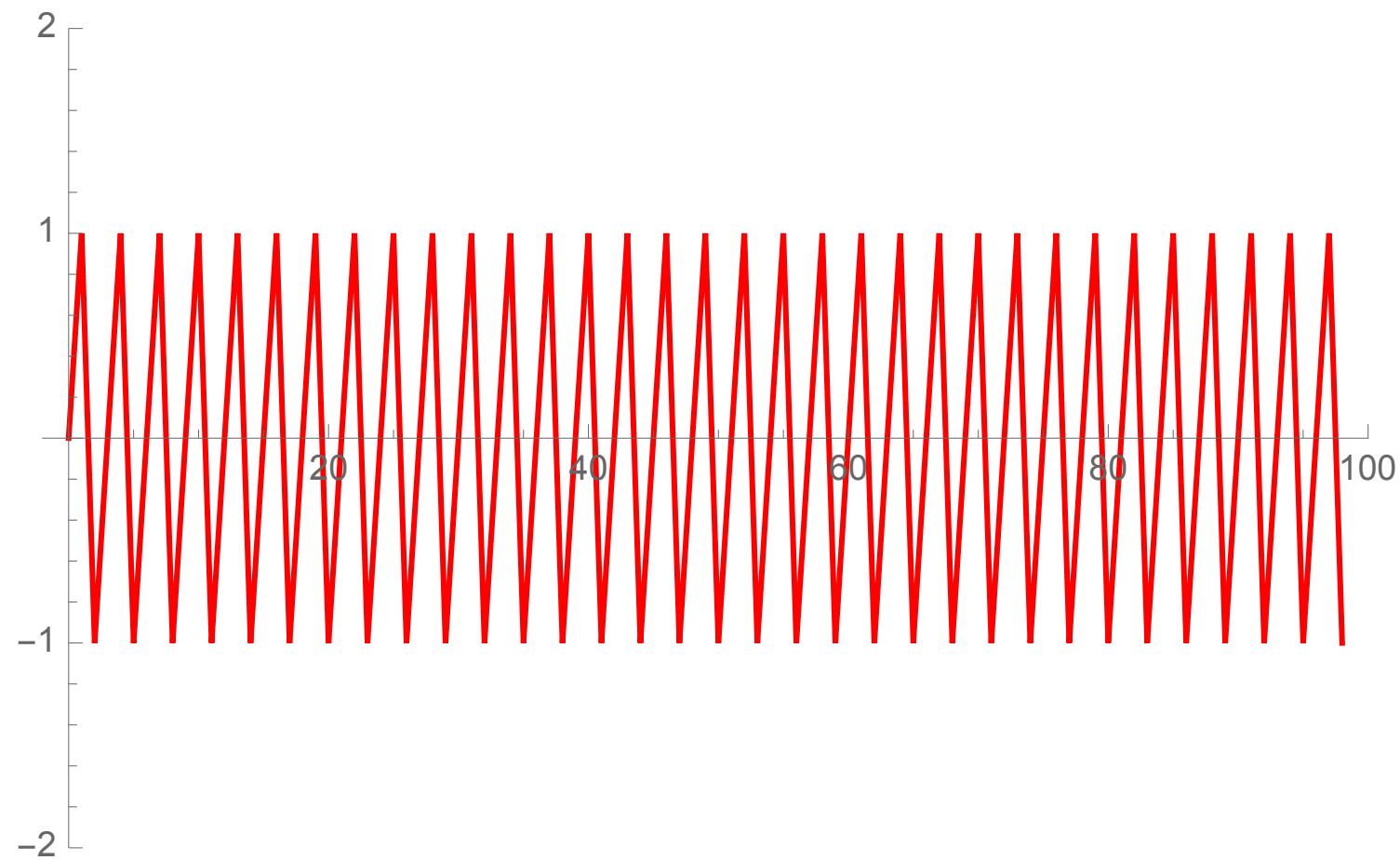
– Non ! Non ! Je ne veux pas d'une fonction qui ne bouge pas. J'ai besoin d'une fonction aléatoire. Dessine-moi une fonction au hasard.

Un rêve...

Alors j'ai dessiné.

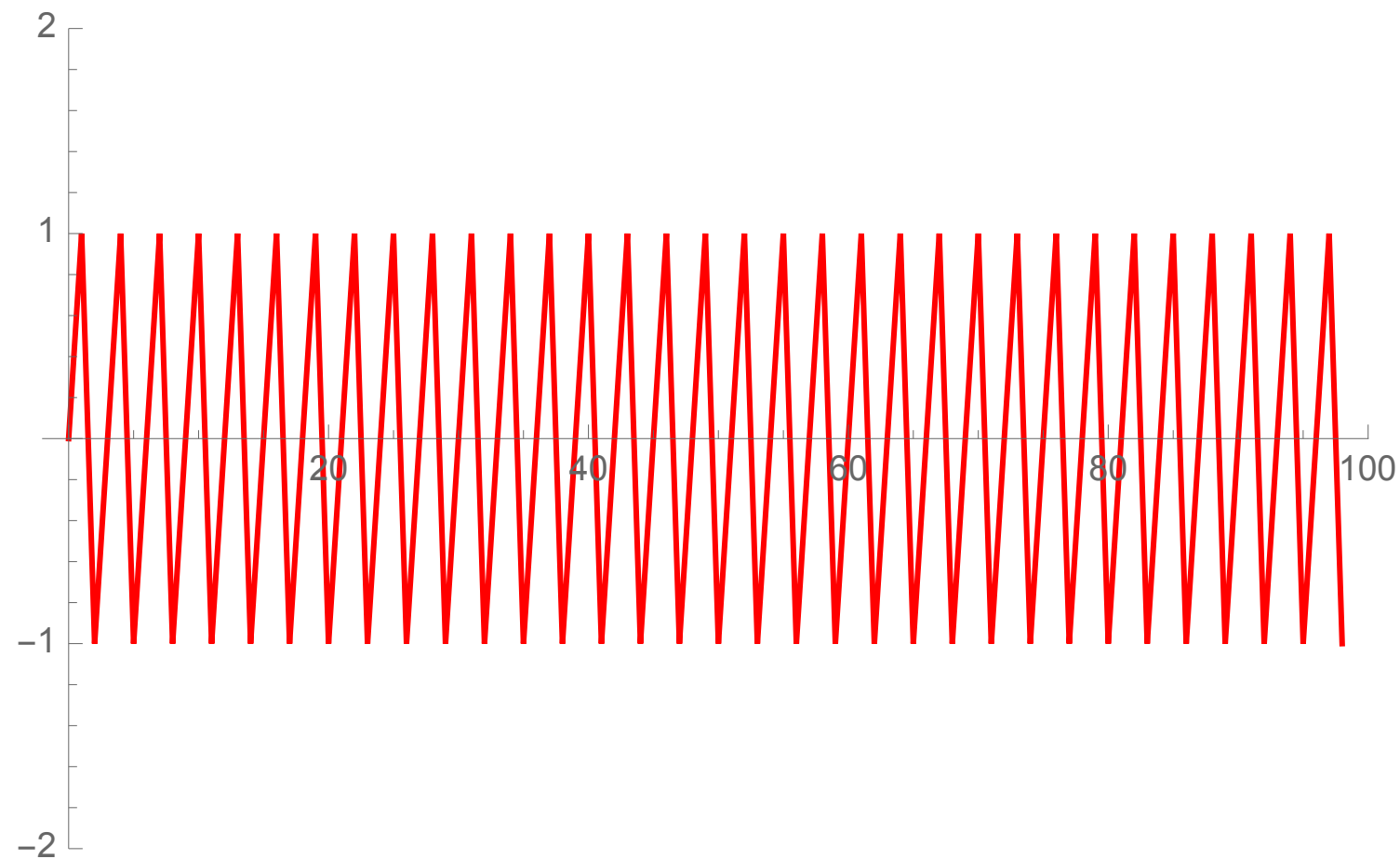
Un rêve...

Alors j'ai dessiné.



Un rêve...

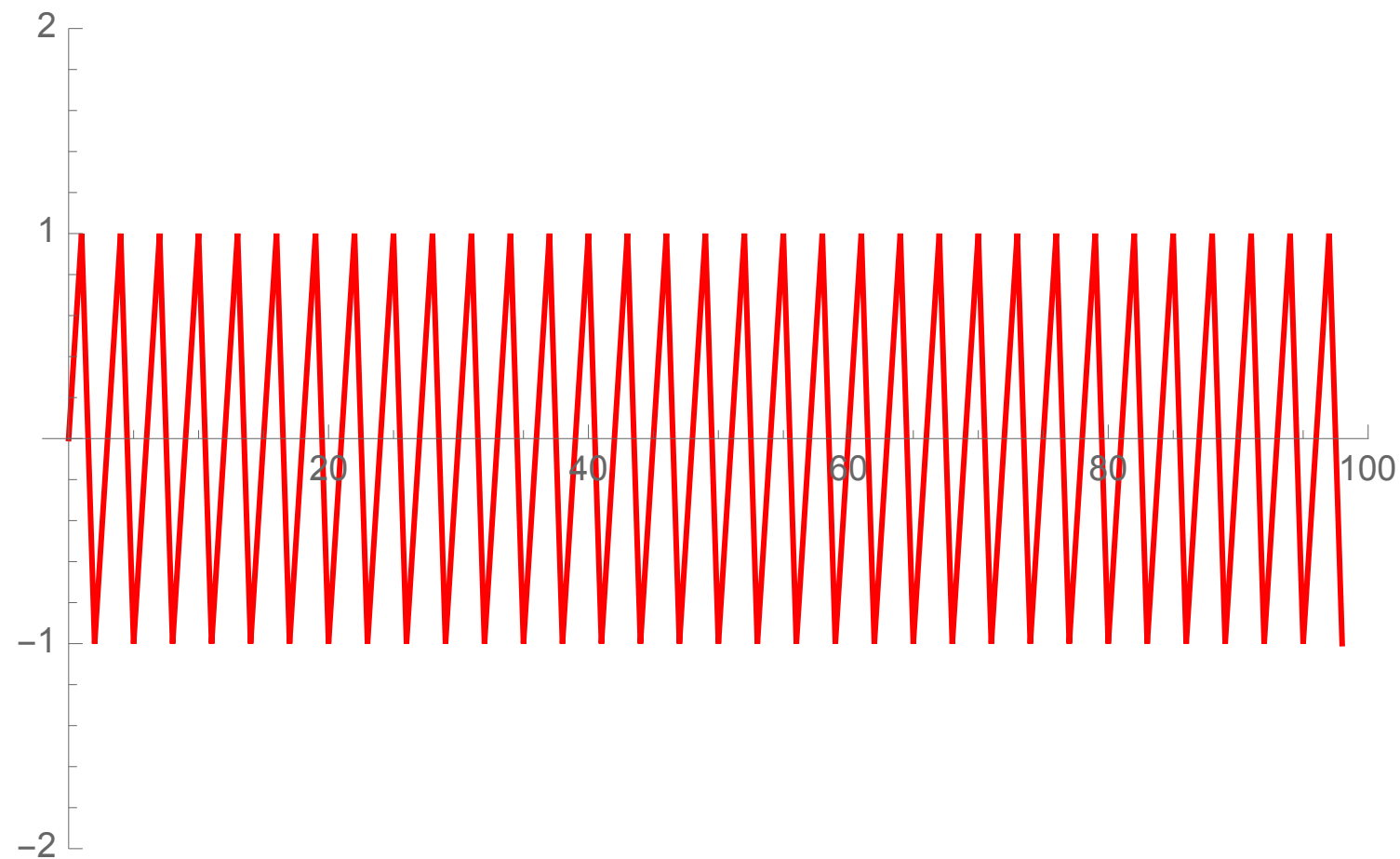
Alors j'ai dessiné.



Il regarda attentivement, puis :

Un rêve...

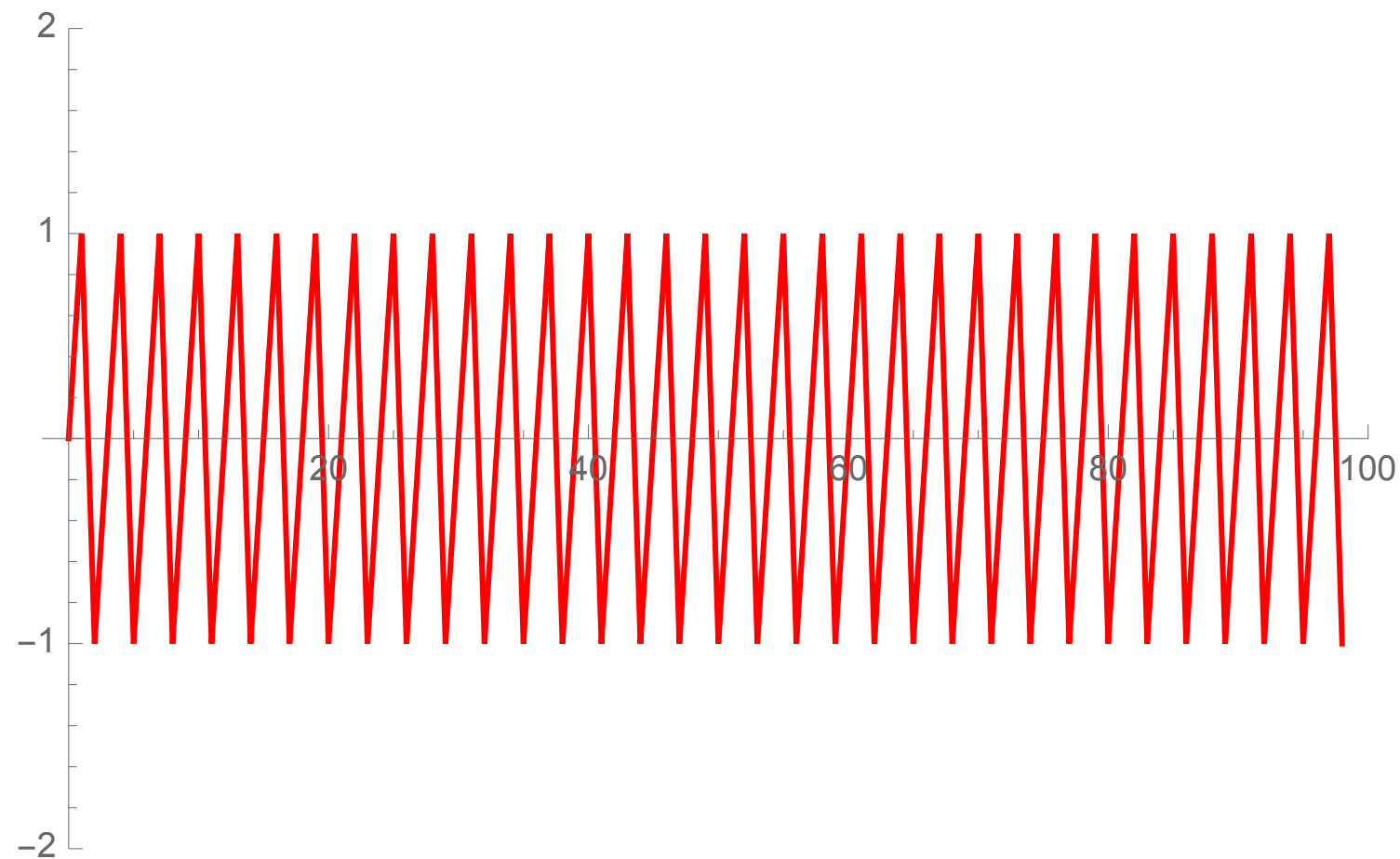
Alors j'ai dessiné.



Il regarda attentivement, puis :
– Non ! Celle-là est prévisible.

Un rêve...

Alors j'ai dessiné.



Il regarda attentivement, puis :

– Non ! Celle-là est prévisible. Fais-en une autre.

Alors, faute de patience, je griffonnai la définition ci-dessous :

Pour un entier $n \geq 1$, posons

$$\mathcal{X}_n = \{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : c_0 = 0 \text{ et } |c_{i+1} - c_i| = 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

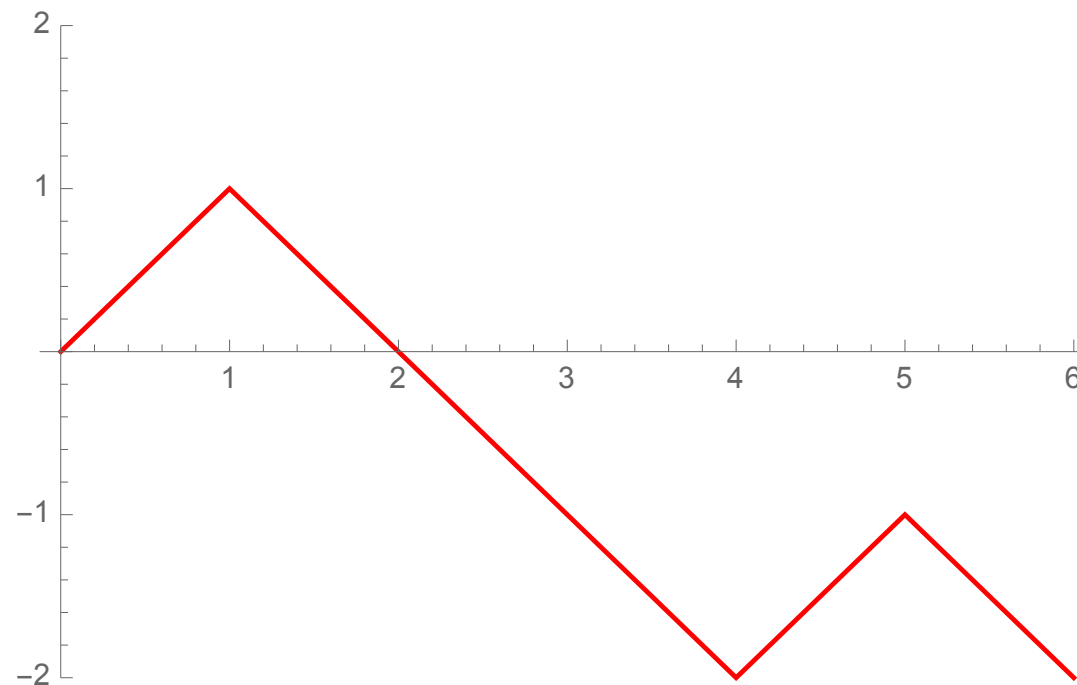


Figure – Le chemin $(0, 1, 0, -1, -2, -1, -2)$.

Alors, faute de patience, je griffonnai la définition ci-dessous :

Pour un entier $n \geq 1$, posons

$$\mathcal{X}_n = \{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : c_0 = 0 \text{ et } |c_{i+1} - c_i| = 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Et je lançai :

- Ça c'est un ensemble fini. Choisis une fonction uniformément au hasard dedans. C'est la fonction que tu veux.

Alors, faute de patience, je griffonnai la définition ci-dessous :

Pour un entier $n \geq 1$, posons

$$\mathcal{X}_n = \{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : c_0 = 0 \text{ et } |c_{i+1} - c_i| = 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Et je lançai :

– Ça c'est un ensemble fini. Choisis une fonction uniformément au hasard dedans. C'est la fonction que tu veux.

Mais je fus bien surpris de voir s'illuminer le visage de mon jeune juge :

– C'est tout à fait comme ça que je la voulais !

Pour $n = 1000$, j'ai choisi un chemin uniformément au hasard dans $\mathcal{X}_{1000}$ et je l'ai dessiné. Lequel ai-je obtenu ?

Pour $n = 1000$, j'ai choisi un chemin uniformément au hasard dans $\mathcal{X}_{1000}$ et je l'ai dessiné. Lequel ai-je obtenu ?

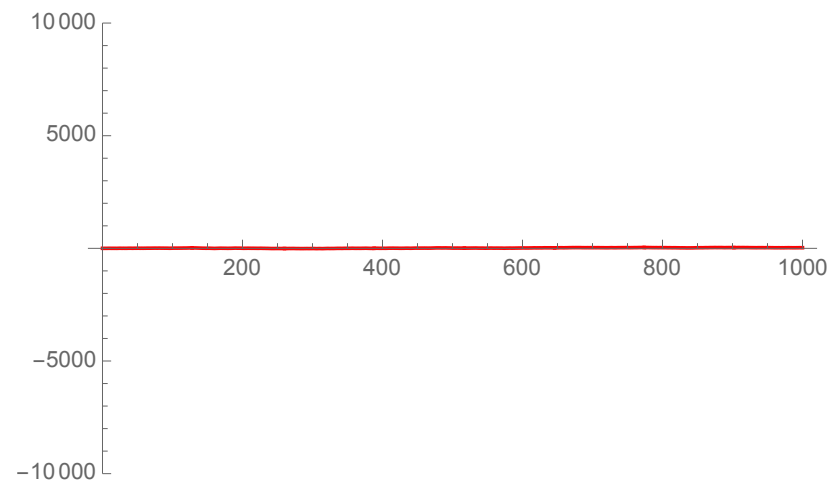


Figure – Dessin 1.

Pour $n = 1000$, j'ai choisi un chemin uniformément au hasard dans $\mathcal{X}_{1000}$ et je l'ai dessiné. Lequel ai-je obtenu ?

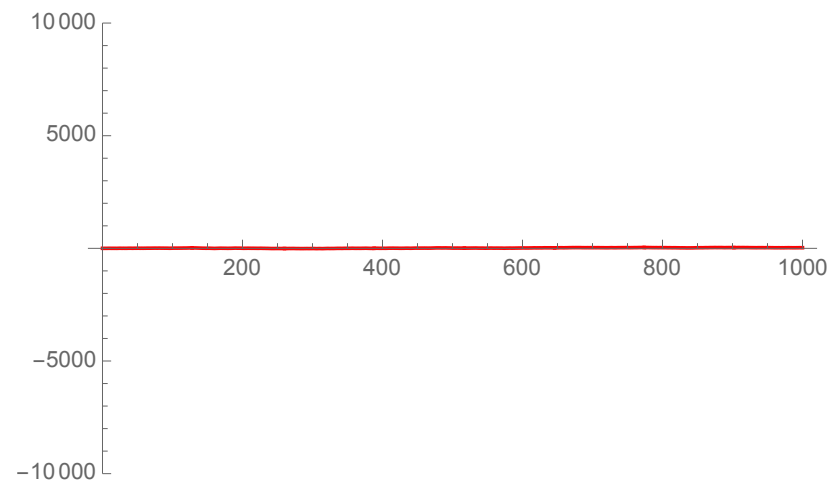


Figure – Dessin 1.

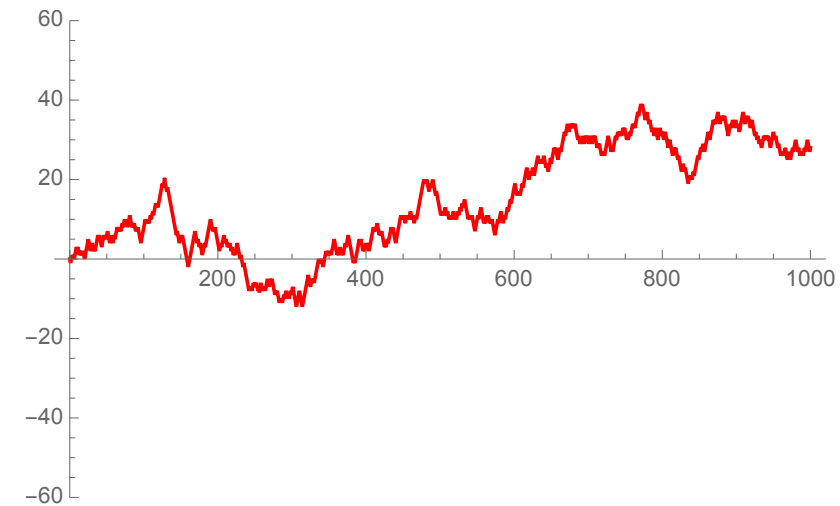


Figure – Dessin 2.

Pour $n = 1000$, j'ai choisi un chemin uniformément au hasard dans $\mathcal{X}_{1000}$ et je l'ai dessiné. Lequel ai-je obtenu ?

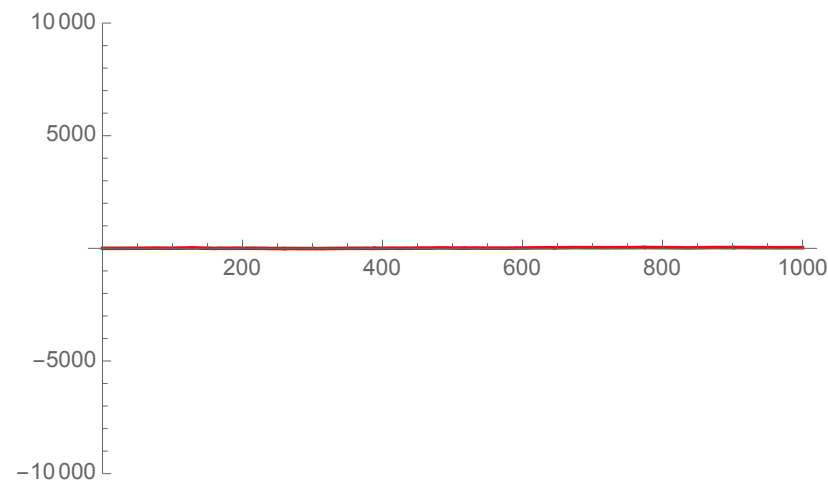


Figure – Dessin 1.

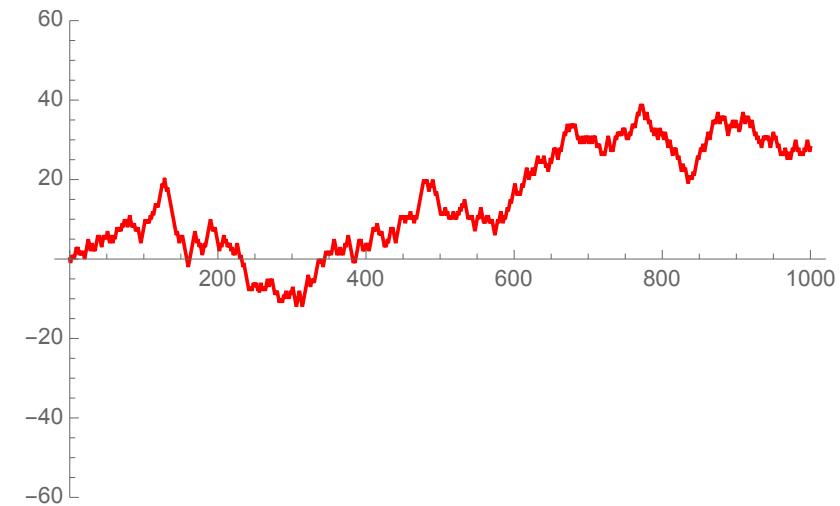


Figure – Dessin 2.

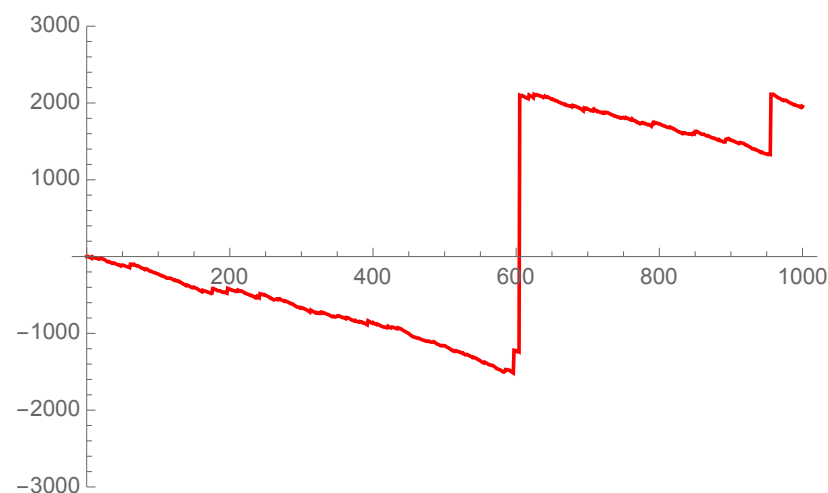


Figure – Dessin 3.

Pour $n = 1000$, j'ai choisi un chemin uniformément au hasard dans $\mathcal{X}_{1000}$ et je l'ai dessiné. Lequel ai-je obtenu ?

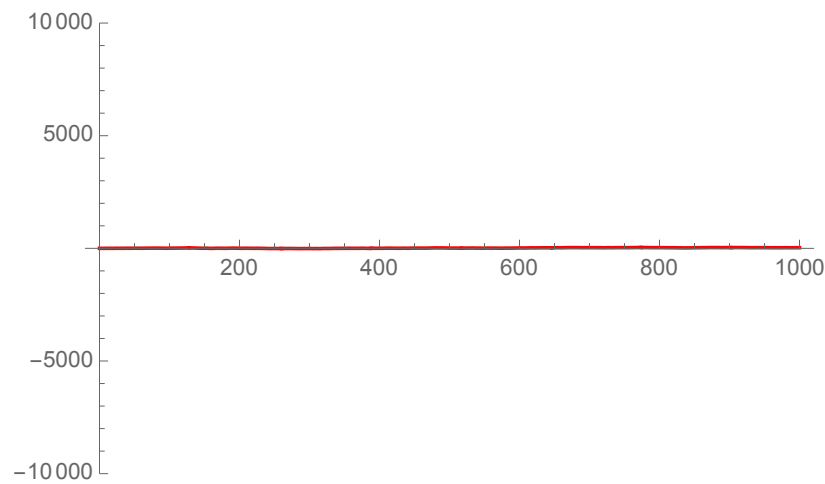


Figure – Dessin 1.

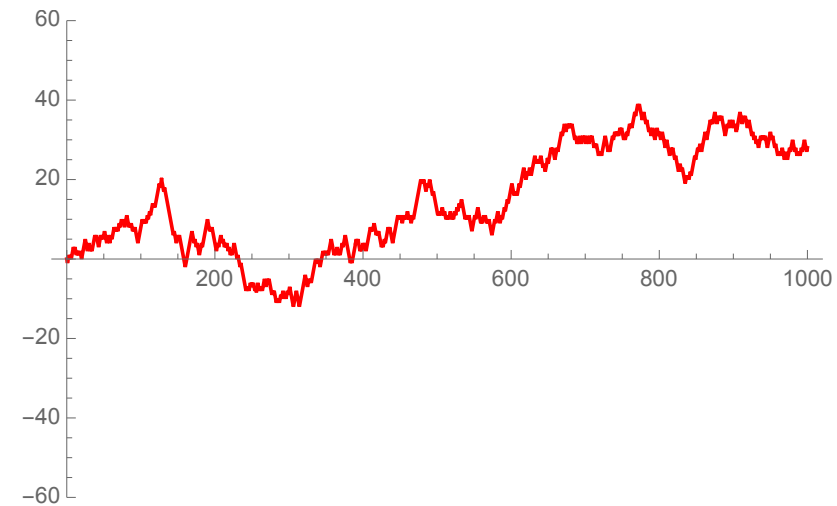


Figure – Dessin 2.

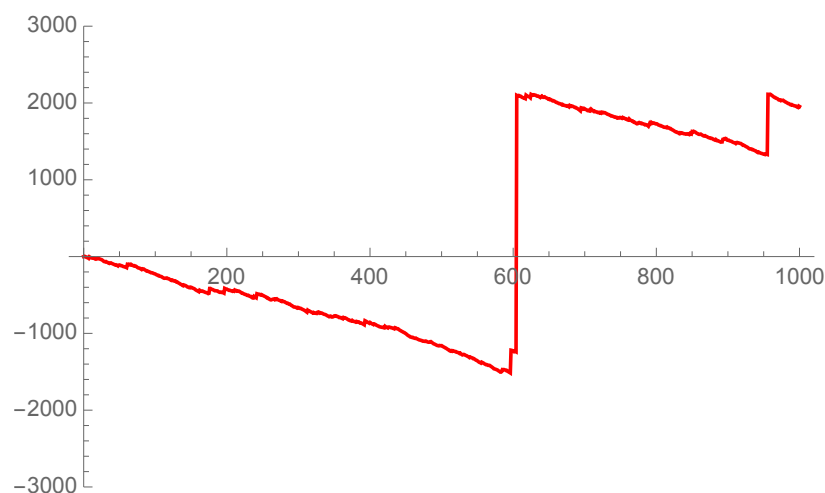


Figure – Dessin 3.

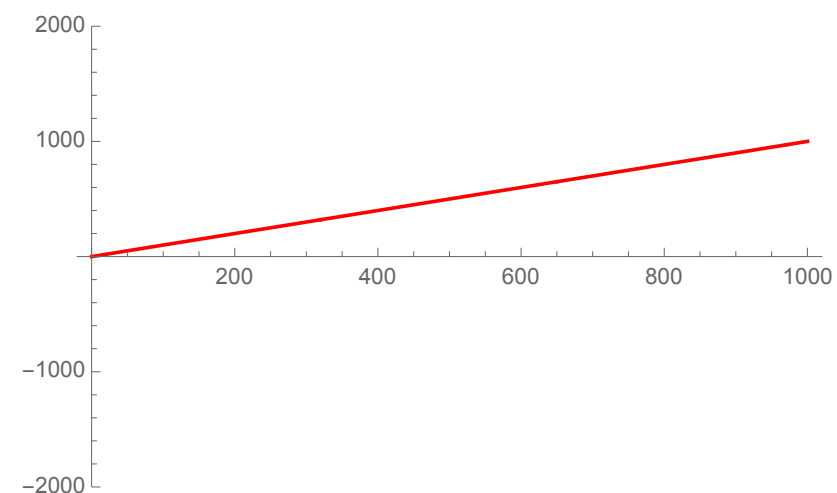


Figure – Dessin 4.

Pour $n = 1000$, j'ai choisi un chemin uniformément au hasard dans $\mathcal{X}_{1000}$ et je l'ai dessiné. Lequel ai-je obtenu ?

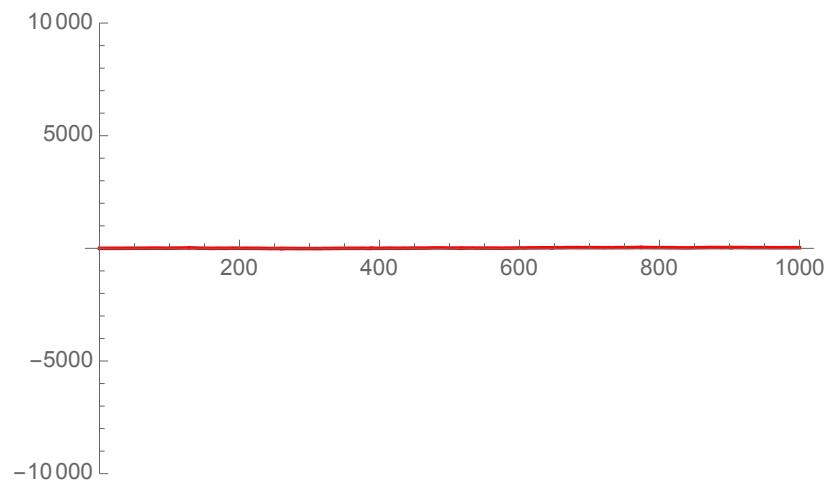


Figure – Dessin 1.

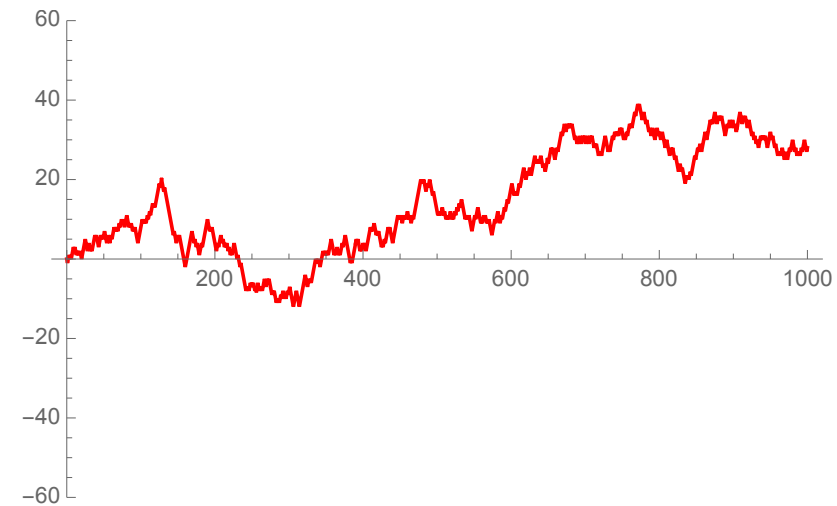


Figure – Dessin 2.

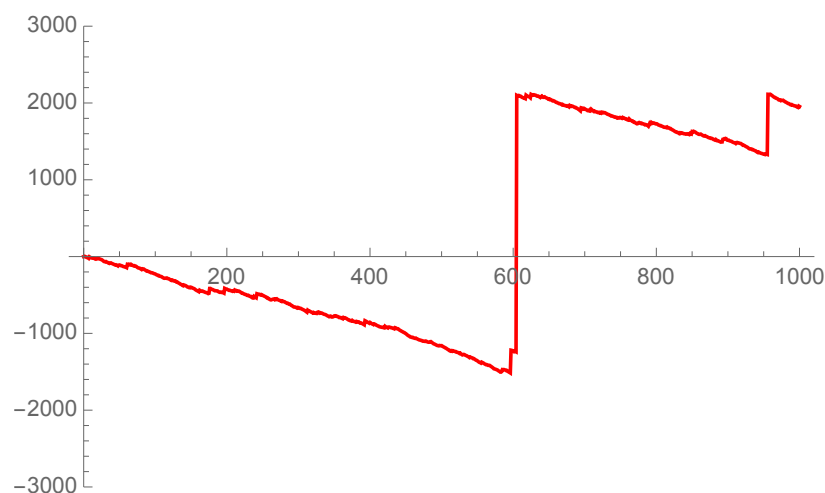


Figure – Dessin 3.

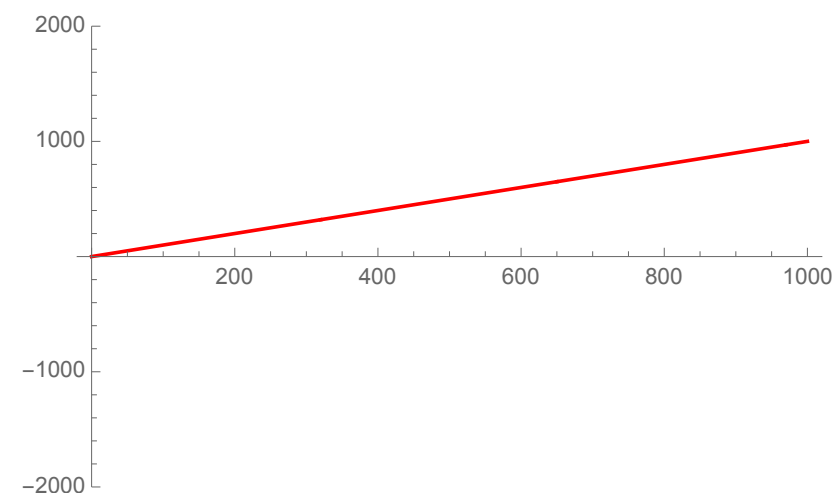


Figure – Dessin 4.

 wooclap.com ; code **dma**.

Ensuite, il me demanda avec brusquerie, sans préambule, comme le fruit d'un problème médité en silence :

Ensuite, il me demanda avec brusquerie, sans préambule, comme le fruit d'un problème médité en silence :

– Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow \infty$?

Alors, je lui dis :

Alors, je lui dis :

Soit E un espace polonais, on note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E muni de sa tribu borélienne.

On considère la topologie faible- $\star$ sur $\mathcal{M}_1(E)$ pour laquelle la convergence $\mu_n \rightarrow \mu$ est donnée par

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(E), \quad \mu_n(f) \rightarrow \mu(f).$$

Exemples :

$E =$ fonctions càdlàg $[0, 1] \rightarrow$ espace polonais (ou même des mesures finies sur un espace polonais) muni de la topologie de Skorokhod J_1 .

$E = \{\text{classes d'isométrie}\}$ muni de la distance de Gromov–Hausdorff.

Alors, je lui "

Soit E un espace
sur E muni

On considère
 $\mu_n \rightarrow \mu$ es

Exemples :

$E =$ fonction
un espace

$E = \{\text{classes d'isométrie}\}$ muni de la distance de Gromov-Hausdorff.



s de probabilité

vergence

ures finies sur

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de “taille” n

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de “taille” n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de “taille” n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$.

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de “taille” n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$.

↪ Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$.

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de “taille” n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$.

→ Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$.

→ Comprendre les propriétés typiques de $\mathcal{X}_n$.

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de “taille” n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$.

→ Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$.

→ Comprendre les propriétés typiques de $\mathcal{X}_n$. Soit X_n un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi *uniformément au hasard*.

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de “taille” n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$.

→ Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$.

→ Comprendre les propriétés typiques de $\mathcal{X}_n$. Soit X_n un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi *uniformément au hasard*. Que dire de X_n ?

Idée générale

Soit $\mathcal{X}_n$ un ensemble d'objets combinatoires de "taille" n (permutations, partitions, graphes, fonctions, chemins, matrices, etc.).

But : étudier $\mathcal{X}_n$.

→ Trouver le cardinal de $\mathcal{X}_n$.

→ Comprendre les propriétés typiques de $\mathcal{X}_n$. Soit X_n un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi *uniformément au hasard*. Que dire de X_n ?

💡 Une possibilité pour étudier X_n est de trouver un objet continu X tel que $X_n \rightarrow X$ quand $n \rightarrow \infty$.

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

Plusieurs intérêts :

$\nwarrow \rightarrow$ *Du discret au continu* : si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie $\mathcal{P}$.

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

Plusieurs intérêts :

- $\leadsto$ *Du discret au continu* : si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie $\mathcal{P}$.
- $\leadsto$ *Du continu au discret* : si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par X et passe à la limite, X_n vérifie « à peu près » $\mathcal{P}$ pour n grand.

De quoi s'agit-il?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- $\leadsto$ *Du discret au continu* : si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie $\mathcal{P}$.
- $\leadsto$ *Du continu au discret* : si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par X et passe à la limite, X_n vérifie « à peu près » $\mathcal{P}$ pour n grand.
- $\leadsto$ *Universalité* : si $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une autre suite d'objets qui converge vers X , alors X_n et Y_n ont à peu près les mêmes propriétés pour n grand.

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

$\leadsto$ Dans quel espace vivent les objets ?

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

$\leadsto$ *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique (Z, d) .

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

↪ *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique (Z, d) .

↪ *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?*

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

↪ *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique (Z, d) .

↪ *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?* Ici, convergence en loi, pour des variables aléatoires à valeurs dans un même espace :

$$\mathbb{E}[F(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[F(X)]$$

pour toute fonction continue bornée $F : Z \rightarrow \mathbb{R}$.

De quoi s'agit-il ?

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

↪ *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique (Z, d) .

↪ *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?* Ici, convergence en loi, pour des variables aléatoires à valeurs dans un même espace :

$$\mathbb{E}[F(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[F(X)]$$

pour toute fonction continue bornée $F : Z \rightarrow \mathbb{R}$.



$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} X \quad \text{implique} \quad G(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} G(X)$$

pour toute fonction continue $G : Z \rightarrow \mathbb{R}$.

Plan

I. CHEMINS ALÉATOIRES

Plan

I. CHEMINS ALÉATOIRES

II. ARBRES ALÉATOIRES

I. CHEMINS ALÉATOIRES



II. ARBRES ALÉATOIRES

Rappel du contexte

Pour $n \geq 1$, posons

$$\mathcal{X}_n = \{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : c_0 = 0 \text{ et } |c_{i+1} - c_i| = 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

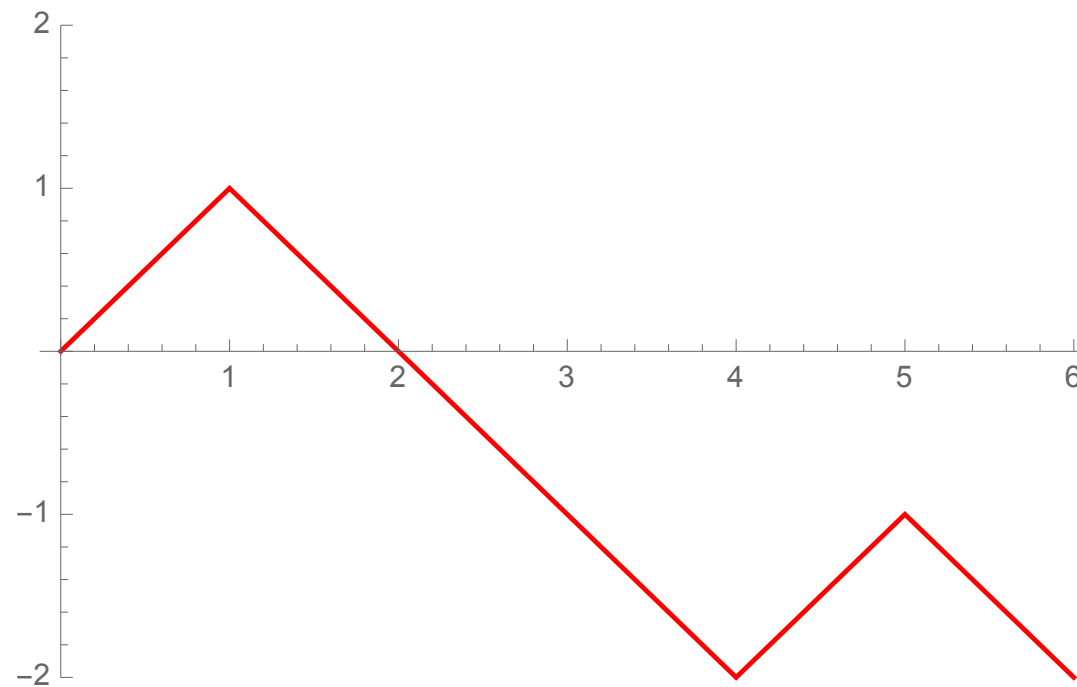


Figure – Le chemin $(0, 1, 0, -1, -2, -1, -2)$.

Rappel du contexte

Pour $n \geq 1$, posons

$$\mathcal{X}_n = \{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : c_0 = 0 \text{ et } |c_{i+1} - c_i| = 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Soit $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi uniformément au hasard. À quoi ressemble-t-il ?

Rappel du contexte

Pour $n \geq 1$, posons

$$\mathcal{X}_n = \{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : c_0 = 0 \text{ et } |c_{i+1} - c_i| = 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Soit $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi uniformément au hasard. À quoi ressemble-t-il ?

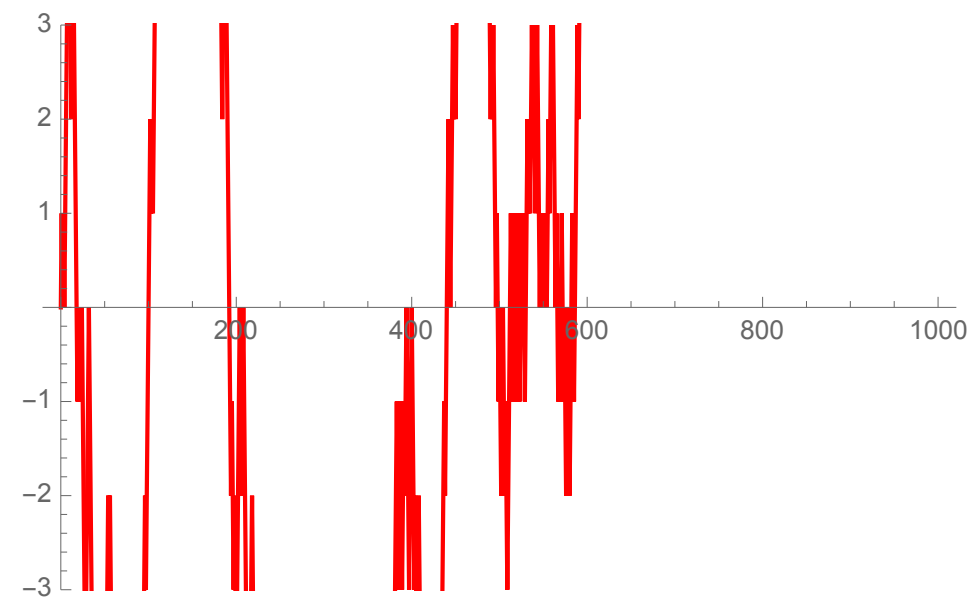


Figure – Une simulation de $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ pour $n = 1000$.

Rappel du contexte

Pour $n \geq 1$, posons

$$\mathcal{X}_n = \{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : c_0 = 0 \text{ et } |c_{i+1} - c_i| = 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Soit $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi uniformément au hasard. À quoi ressemble-t-il ?

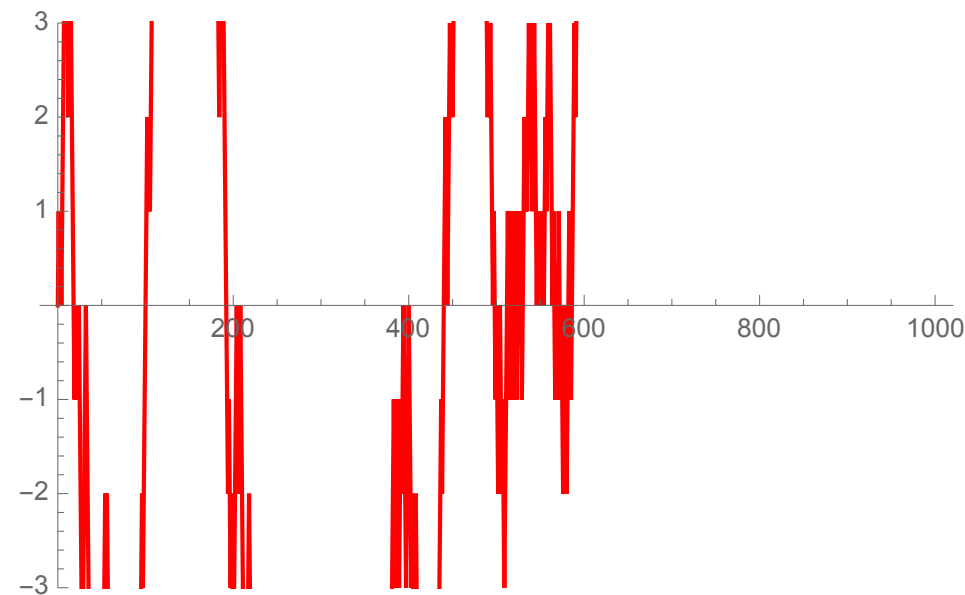


Figure – Une simulation de $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ pour $n = 1000$.

? Quel est l'ordre de grandeur de a_n pour que $\frac{1}{a_n}(C_0, C_1, \dots, C_n)$ ait un comportement non trivial ?

Rappel du contexte

Pour $n \geq 1$, posons

$$\mathcal{X}_n = \{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : c_0 = 0 \text{ et } |c_{i+1} - c_i| = 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Soit $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ un élément de $\mathcal{X}_n$ choisi uniformément au hasard. À quoi ressemble-t-il ?

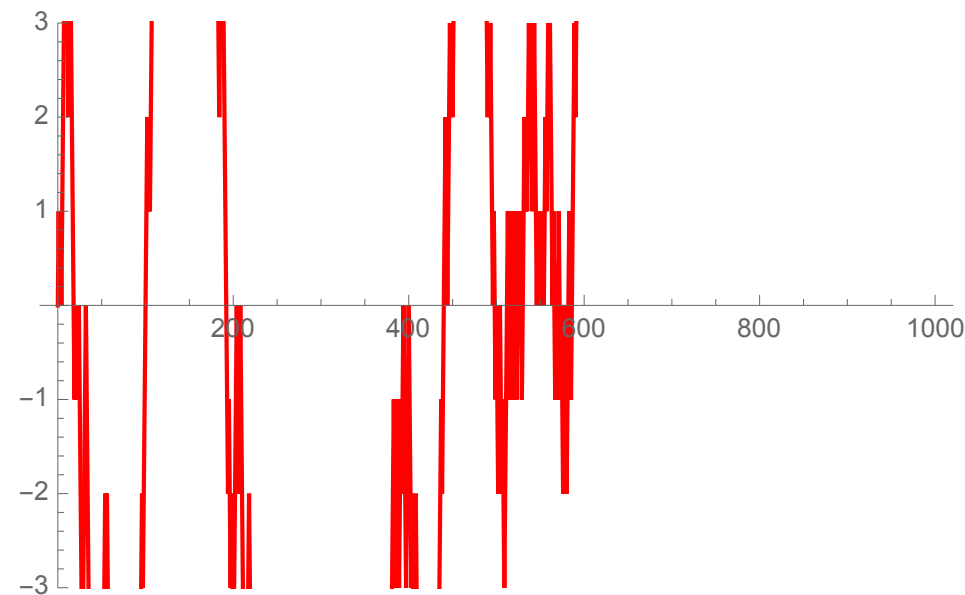


Figure – Une simulation de $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ pour $n = 1000$.

Ⓢ ? Quel est l'ordre de grandeur de a_n pour que $\frac{1}{a_n}(C_0, C_1, \dots, C_n)$ ait un comportement non trivial ?



wooclap.com ; code **dma**.

Lien avec les marches aléatoires

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Lien avec les marches aléatoires

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Théorème.

Les deux variables aléatoires $(C_0, \dots, C_n)$ et $(S_0, \dots, S_n)$ ont la même loi.

Lien avec les marches aléatoires

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Théorème.

Les deux variables aléatoires $(C_0, \dots, C_n)$ et $(S_0, \dots, S_n)$ ont la même loi.

Démonstration.

– les deux variables aléatoires ont même support X_n .



Lien avec les marches aléatoires

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Théorème.

Les deux variables aléatoires $(C_0, \dots, C_n)$ et $(S_0, \dots, S_n)$ ont la même loi.

Démonstration.

- les deux variables aléatoires ont même support $\mathcal{X}_n$.
- soit $(c_0, \dots, c_n) \in \mathcal{X}_n$. Posons $s_i = c_i - c_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$.



Lien avec les marches aléatoires

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Théorème.

Les deux variables aléatoires $(C_0, \dots, C_n)$ et $(S_0, \dots, S_n)$ ont la même loi.

Démonstration.

- les deux variables aléatoires ont même support $\mathcal{X}_n$.
- soit $(c_0, \dots, c_n) \in \mathcal{X}_n$. Posons $s_i = c_i - c_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors

$$\mathbb{P}((S_0, \dots, S_n) = (c_0, \dots, c_n)) = \mathbb{P}(X_1 = s_1, X_2 = s_2, \dots, X_n = s_n)$$



Lien avec les marches aléatoires

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Théorème.

Les deux variables aléatoires $(C_0, \dots, C_n)$ et $(S_0, \dots, S_n)$ ont la même loi.

Démonstration.

- les deux variables aléatoires ont même support $\mathcal{X}_n$.
- soit $(c_0, \dots, c_n) \in \mathcal{X}_n$. Posons $s_i = c_i - c_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((S_0, \dots, S_n) = (c_0, \dots, c_n)) &= \mathbb{P}(X_1 = s_1, X_2 = s_2, \dots, X_n = s_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = s_1) \mathbb{P}(X_2 = s_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = s_n) \end{aligned}$$



Lien avec les marches aléatoires

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Théorème.

Les deux variables aléatoires $(C_0, \dots, C_n)$ et $(S_0, \dots, S_n)$ ont la même loi.

Démonstration.

- les deux variables aléatoires ont même support $\mathcal{X}_n$.
- soit $(c_0, \dots, c_n) \in \mathcal{X}_n$. Posons $s_i = c_i - c_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((S_0, \dots, S_n) = (c_0, \dots, c_n)) &= \mathbb{P}(X_1 = s_1, X_2 = s_2, \dots, X_n = s_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = s_1) \mathbb{P}(X_2 = s_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = s_n) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$



Le bon ordre de grandeur de S_n

Le bon ordre de grandeur de S_n

D'après le théorème central limite, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.

Le bon ordre de grandeur de S_n

D'après le théorème central limite, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.

↘ **Attention** au sens de la convergence !

Le bon ordre de grandeur de S_n

D'après le théorème central limite, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.

↗ **Attention** au sens de la convergence !

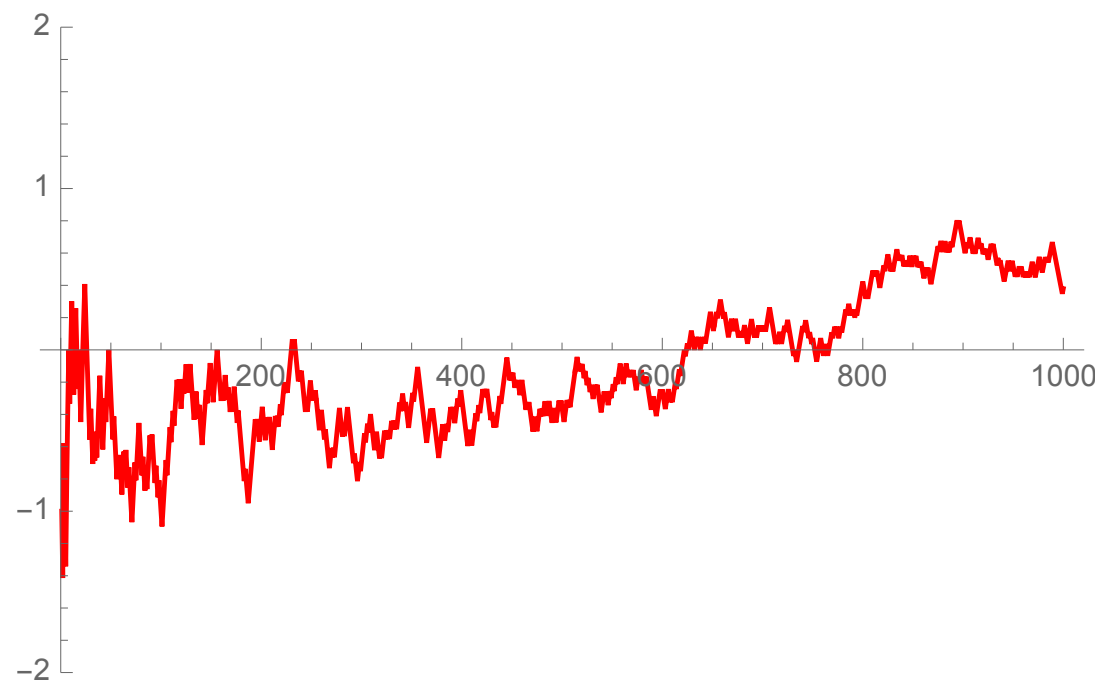


Figure – Une simulation de $\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right)_{1 \leq k \leq n}$ pour $n = 1000$.

Le bon ordre de grandeur de S_n

D'après le théorème central limite, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.

↗ **Attention** au sens de la convergence !

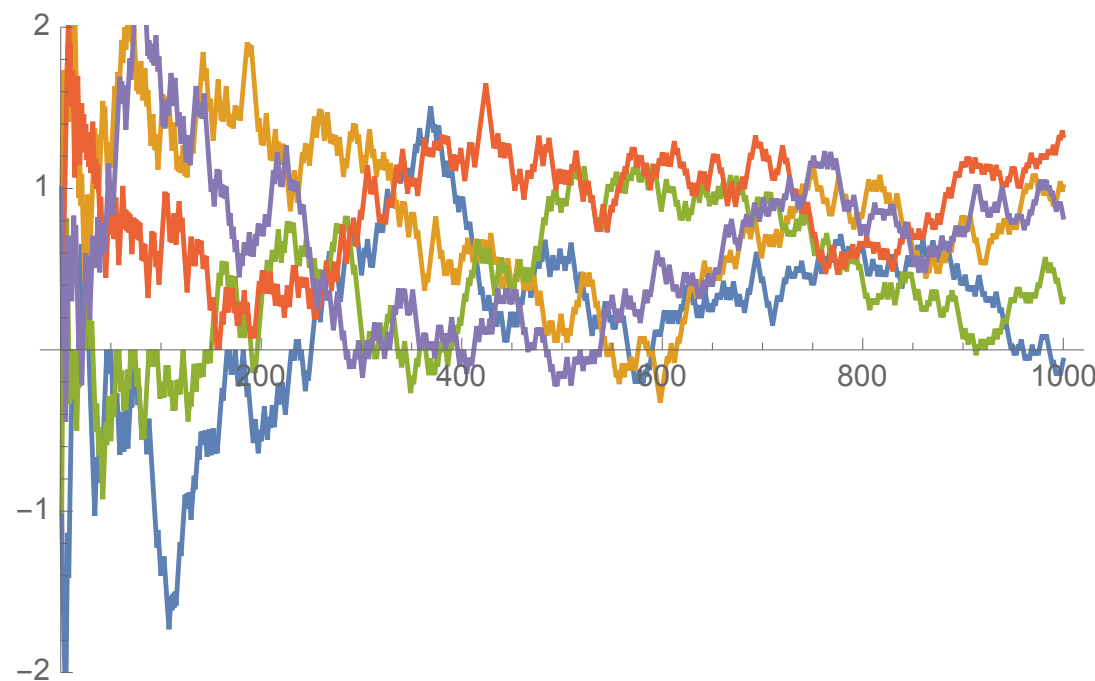


Figure – Cinq simulations de $\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right)_{1 \leq k \leq n}$ pour $n = 1000$.

Le bon ordre de grandeur de S_n

D'après le théorème central limite, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.

↗ **Attention** au sens de la convergence !

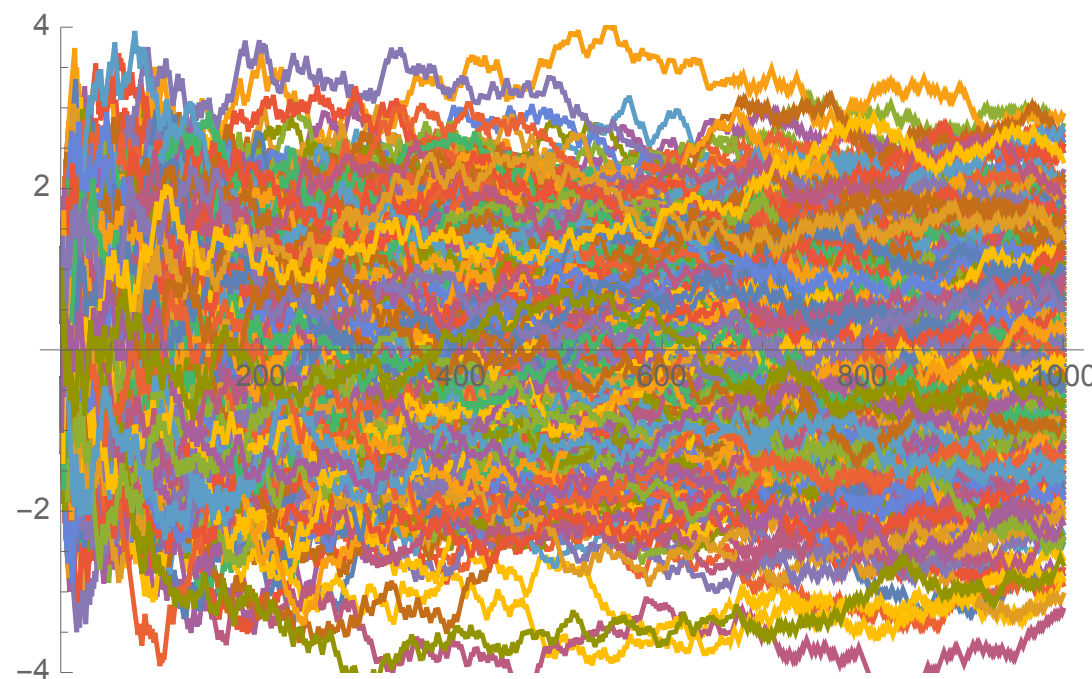


Figure – 1000 simulations de $\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right)_{1 \leq k \leq n}$ pour $n = 1000$.

Le bon ordre de grandeur de S_n

D'après le théorème central limite, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.

↗ **Attention** au sens de la convergence !

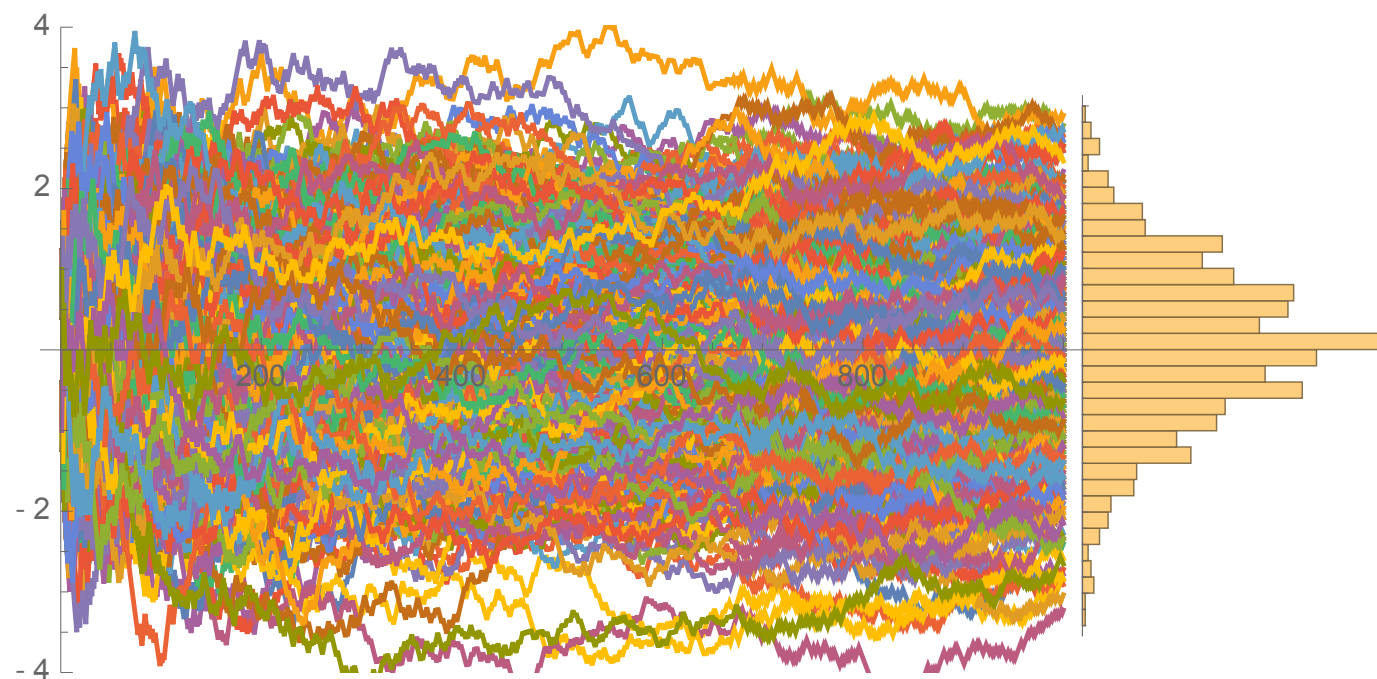


Figure – 1000 simulations de $\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right)_{1 \leq k \leq n}$ pour $n = 1000$.

Le bon ordre de grandeur de S_n

D'après le théorème central limite, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite.

↘ **Attention** au sens de la convergence !

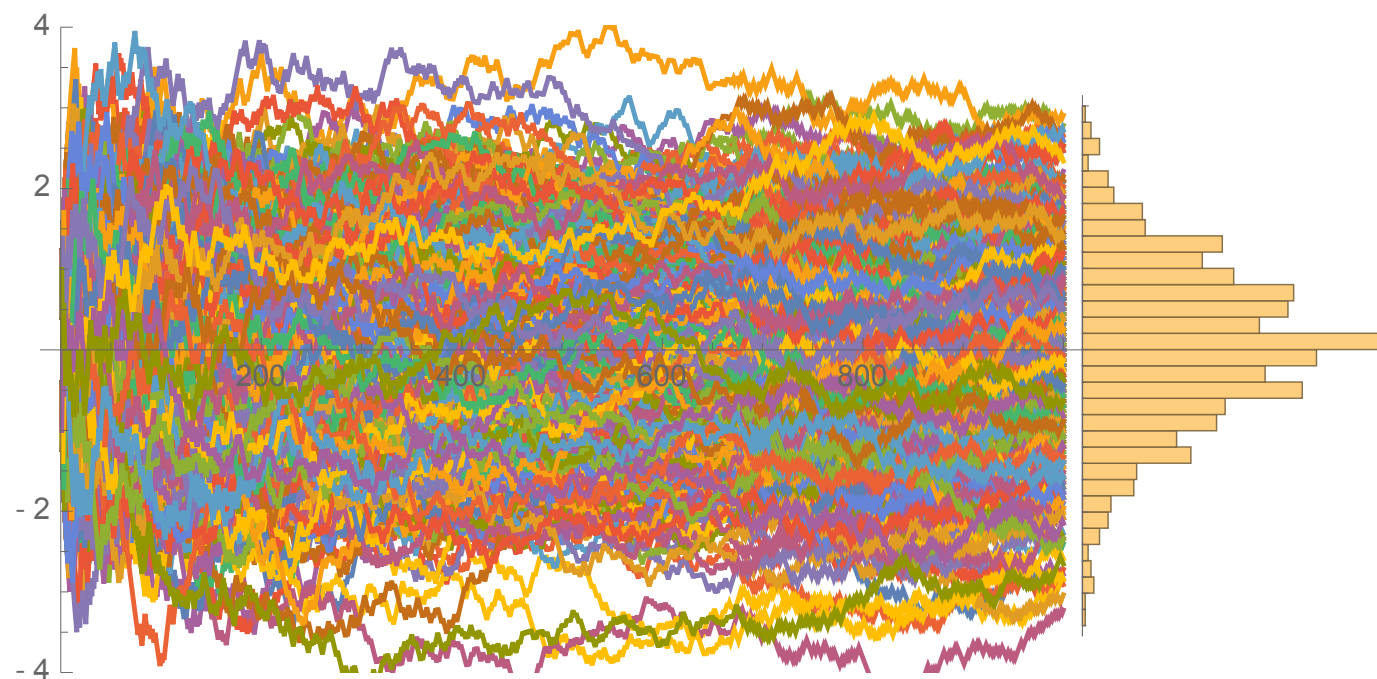


Figure – 1000 simulations de $\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right)_{1 \leq k \leq n}$ pour $n = 1000$.

Pour tous $a < b$,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < b\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Théorème Central Limite

Théorème (Central Limite)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et de même loi) avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2]$. On suppose $\sigma^2 \in]0, \infty[$.

Théorème Central Limite

Théorème (Central Limite)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et de même loi) avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2]$. On suppose $\sigma^2 \in]0, \infty[$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Théorème Central Limite

Théorème (Central Limite)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et de même loi) avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2]$. On suppose $\sigma^2 \in]0, \infty[$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Alors :

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\mathcal{N}(0, 1)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Théorème Central Limite

Théorème (Central Limite)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et de même loi) avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2]$. On suppose $\sigma^2 \in]0, \infty[$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Alors :

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\mathcal{N}(0, 1)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

↗ Autrement dit, pour toute fonction continue bornée $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[F \left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} [F(\mathcal{N}(0, 1))] .$$

Théorème Central Limite

Théorème (Central Limite)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et de même loi) avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2]$. On suppose $\sigma^2 \in]0, \infty[$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Alors :

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\mathcal{N}(0, 1)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

↪ Autrement dit, pour tous $a < b$,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < b\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Résumons

Résumons

Si $(C_0, \dots, C_n)$ est un chemin choisi uniformément au hasard, $\frac{C_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une Gaussienne centrée réduite.

Résumons

Si $(C_0, \dots, C_n)$ est un chemin choisi uniformément au hasard, $\frac{C_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une Gaussienne centrée réduite.

Mais que dire de la trajectoire

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(C_0, \dots, C_n) \quad ?$$

Une simulation

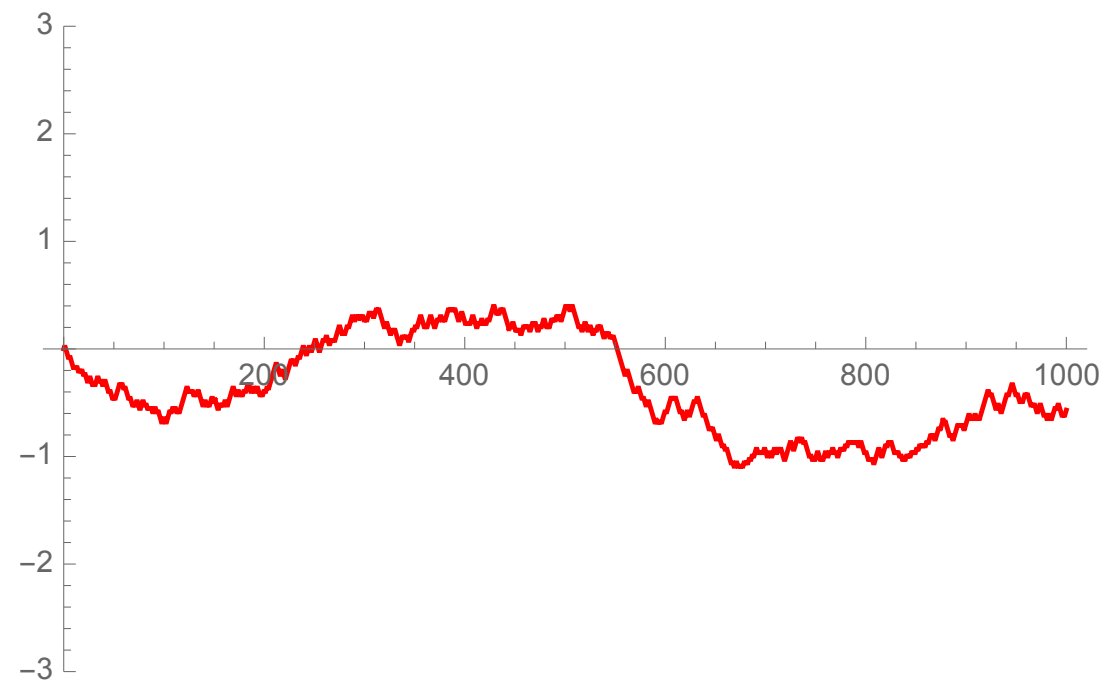


Figure – Une simulation de $\left(\frac{S_0}{\sqrt{n}}, \frac{S_1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$ pour $n = 1000$.

Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.

Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire.

Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire. Alors :

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)}$$

Mouvement brownien, objet limite

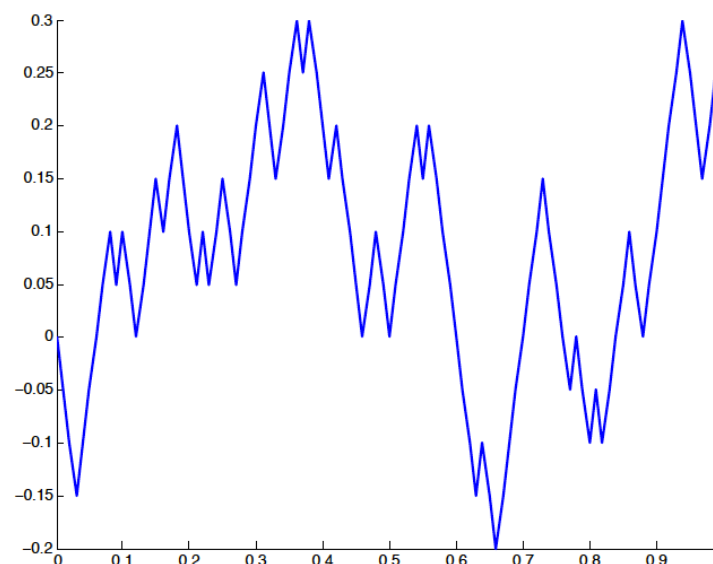
Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire. Alors :

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)}$$

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right)$$

pour $n = 100$:



Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire. Alors :

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)}$$

pour
 $n = 100000 :$



Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire. Alors :

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)}$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme,

$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right)$
pour
 $n = 100000 :$



Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire. Alors :

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (W_t : 0 \leq t \leq 1),$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme,

$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \right)$
pour
 $n = 100000 :$



Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire. Alors :

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (W_t : 0 \leq t \leq 1),$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où $(W_t : 0 \leq t \leq 1)$ est une fonction continue aléatoire appelée **mouvement brownien** (indépendante de σ).

pour
 $n = 100000 :$



Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire. Alors :

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (W_t : 0 \leq t \leq 1),$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où $(W_t : 0 \leq t \leq 1)$ est une fonction continue aléatoire appelée **mouvement brownien** (indépendante de σ).

↪ Autrement dit, pour toute fonction continue bornée $F : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[F \left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} [F(W_t : 0 \leq t \leq 1)].$$

Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire. Alors :

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (W_t : 0 \leq t \leq 1),$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où $(W_t : 0 \leq t \leq 1)$ est une fonction continue aléatoire appelée **mouvement brownien** (indépendante de σ).

↗ **Conséquence** : pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\frac{\max_{0 \leq k \leq n} S_k}{\sigma\sqrt{n}} > a \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} W_t > a \right)$$

Mouvement brownien, objet limite

Théorème (de Donsker, 1951)

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, on définit S_{nt} par interpolation linéaire. Alors :

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (W_t : 0 \leq t \leq 1),$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où $(W_t : 0 \leq t \leq 1)$ est une fonction continue aléatoire appelée **mouvement brownien** (indépendante de σ).

↗ **Conséquence** : pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\frac{\max_{0 \leq k \leq n} S_k}{\sigma\sqrt{n}} > a \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} W_t > a \right) = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

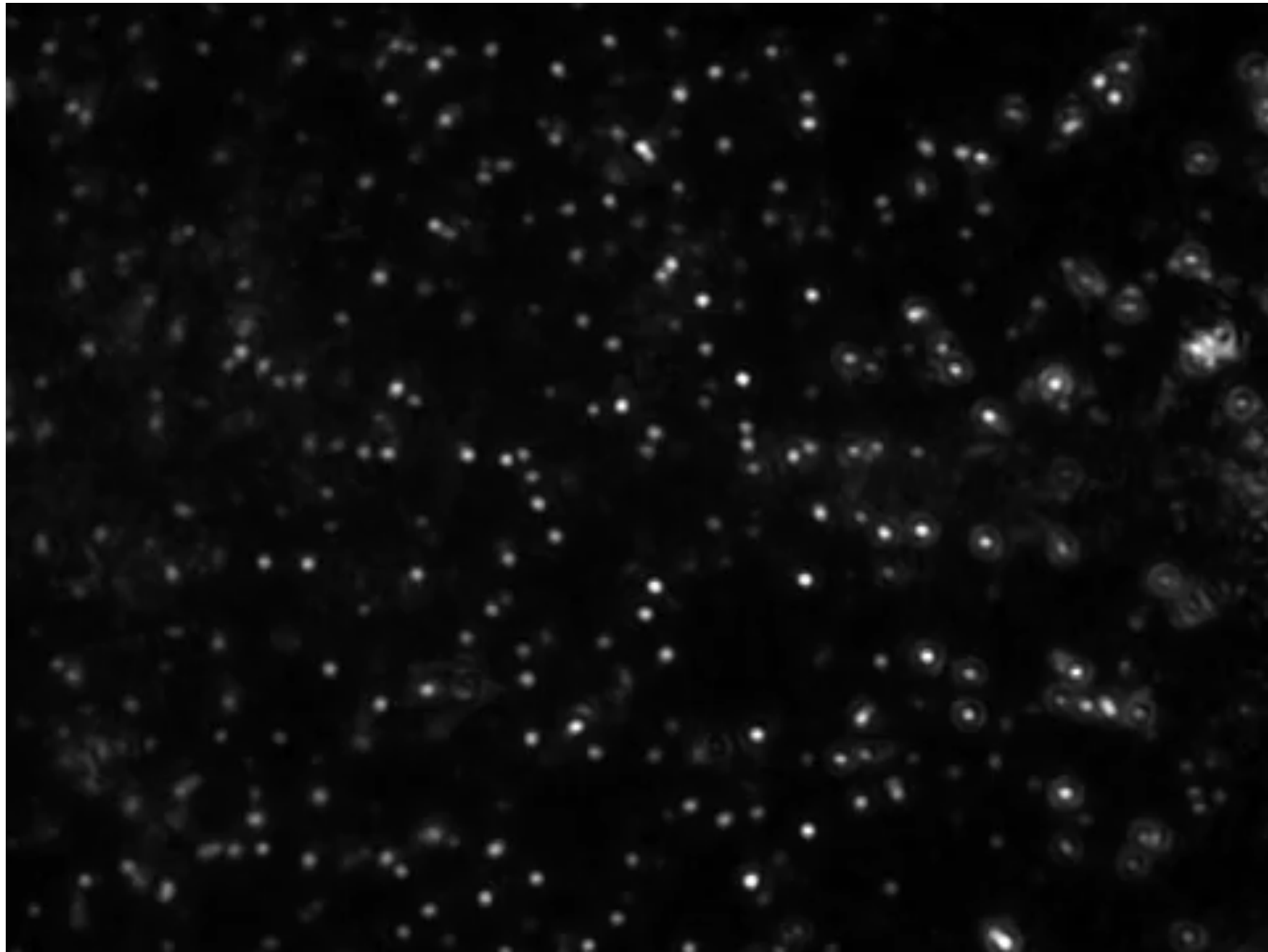
Le mouvement brownien

Le mouvement brownien

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;

Le mouvement brownien

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;



Le mouvement brownien

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : **Einstein** propose une explication de cette observation en utilisant les notions d'atomes et molécules ;

Le mouvement brownien

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : **Einstein** propose une explication de cette observation en utilisant les notions d'atomes et molécules ;
- 1908 : **Perrin** confirme expérimentalement l'existence d'atomes et molécules (prix Nobel 1926) ;

Le mouvement brownien

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : **Einstein** propose une explication de cette observation en utilisant les notions d'atomes et molécules ;
- 1908 : **Perrin** confirme expérimentalement l'existence d'atomes et molécules (prix Nobel 1926) ;

« C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer. »

– Jean Perrin

Le mouvement brownien

- 1827 : **Brown** observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : **Einstein** propose une explication de cette observation en utilisant les notions d'atomes et molécules ;
- 1908 : **Perrin** confirme expérimentalement l'existence d'atomes et molécules (prix Nobel 1926) ;
- 1923 : **Wiener** donne une construction mathématique du mouvement brownien.

I. CHEMINS ALÉATOIRES

II. ARBRES ALÉATOIRES



Arbres aléatoires

Motivations :

→ **Informatique** : structures de données, analyse des algorithmes, théorie des réseaux, etc.

Arbres aléatoires

Motivations :

- **Informatique** : structures de données, analyse des algorithmes, théorie des réseaux, etc.
- **Biologie** : arbres généalogiques et phylogénétiques, etc.

Arbres aléatoires

Motivations :

- ↘ **Informatique** : structures de données, analyse des algorithmes, théorie des réseaux, etc.
- ↘ **Biologie** : arbres généalogiques et phylogénétiques, etc.
- ↘ **Combinatoire** : les arbres sont (parfois) plus simples à énumérer, bijections sympathiques etc.

Arbres aléatoires

Motivations :

- **Informatique** : structures de données, analyse des algorithmes, théorie des réseaux, etc.
- **Biologie** : arbres généalogiques et phylogénétiques, etc.
- **Combinatoire** : les arbres sont (parfois) plus simples à énumérer, bijections sympathiques etc.
- **Probabilités** : les arbres sont des briques de base de plusieurs modèles de graphes aléatoires, possèdent de riches propriétés probabilistes.

Arbres plans

↪ Question :

↪ Question :

Arbres plans



Figure – Deux arbres plans différents

→ Question :

→ Question :

Arbres plans

Soit $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des arbres plans à n sommets.



Figure – Deux arbres plans différents

→ Question :

→ Question :

Arbres plans

Soit $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des arbres plans à n sommets.



Figure – Deux arbres plans différents

→ Question : $\#\mathcal{X}_n = ?$

→ Question :

Arbres plans

Soit $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des arbres plans à n sommets.



Figure – Deux arbres plans différents

→ Question : $\#\mathcal{X}_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$.

→ Question :

Arbres plans

Soit $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des arbres plans à n sommets.



Figure – Deux arbres plans différents

→ Question : $\#\mathcal{X}_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$.

→ Question : À quoi ressemble un grand arbre plan typique ?

J'ai simulé et dessiné un arbre planaire uniforme à 10000 sommets. Qu'ai-je obtenu ?

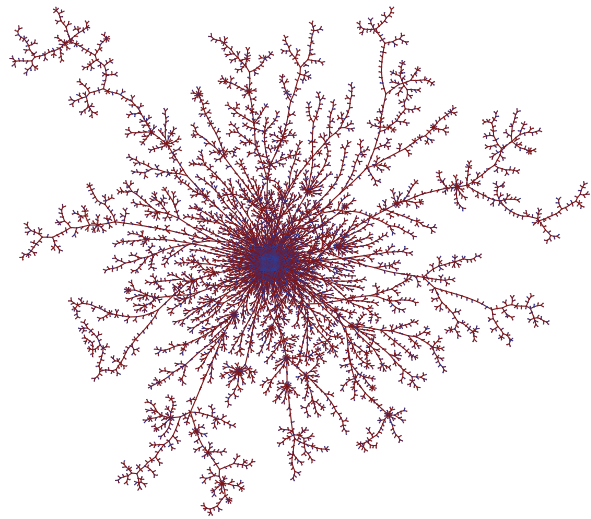


Figure – Résultat 1.

J'ai simulé et dessiné un arbre planaire uniforme à 10000 sommets. Qu'ai-je obtenu ?

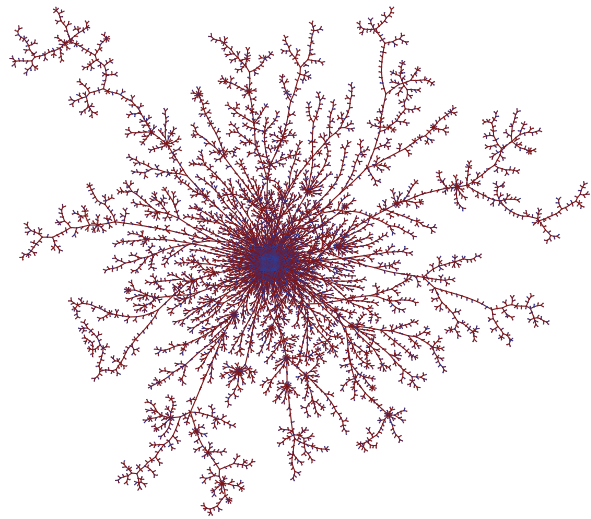


Figure – Résultat 1.

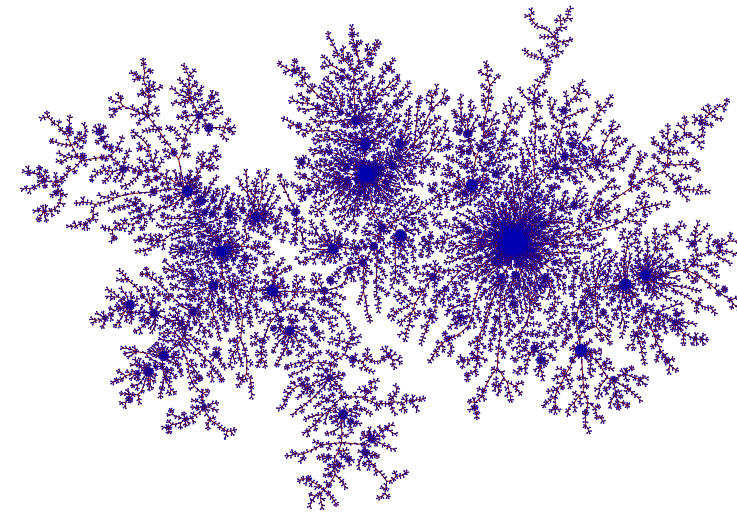


Figure – Résultat 2.

J'ai simulé et dessiné un arbre planaire uniforme à 10000 sommets. Qu'ai-je obtenu ?

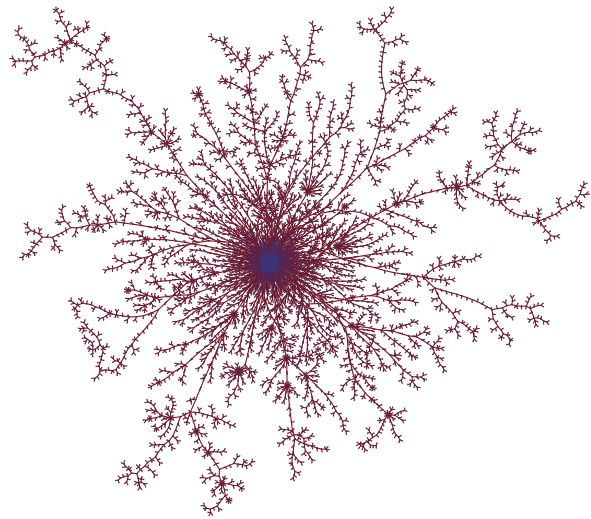


Figure – Résultat 1.

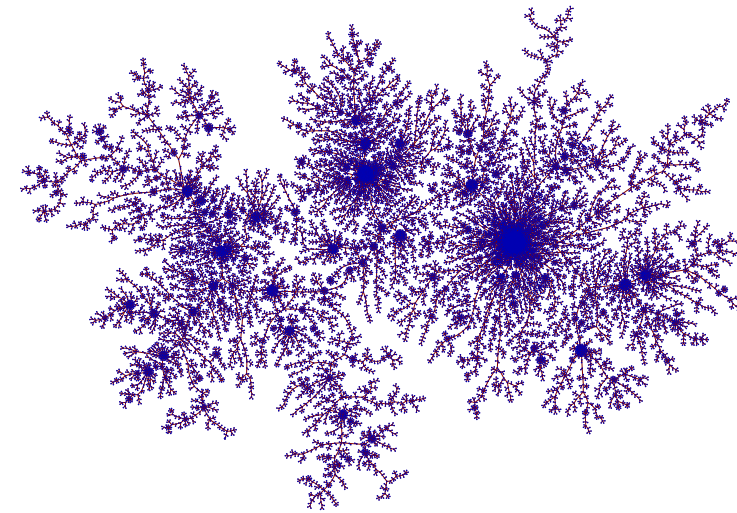


Figure – Résultat 2.

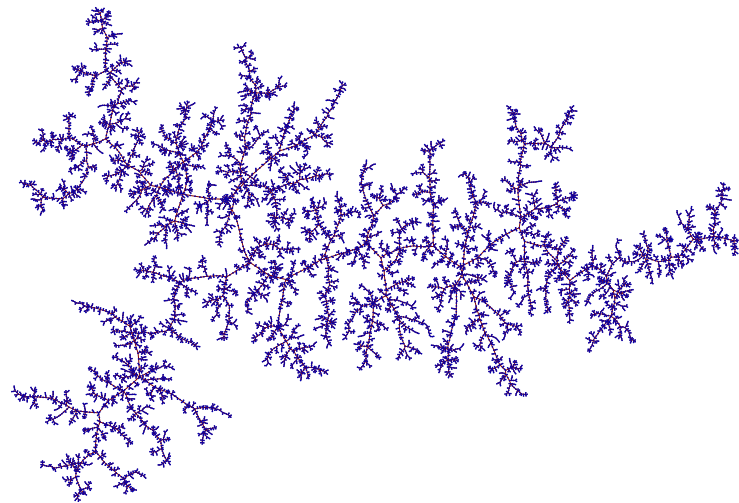


Figure – Résultat 3.

J'ai simulé et dessiné un arbre planaire uniforme à 10000 sommets. Qu'ai-je obtenu ?

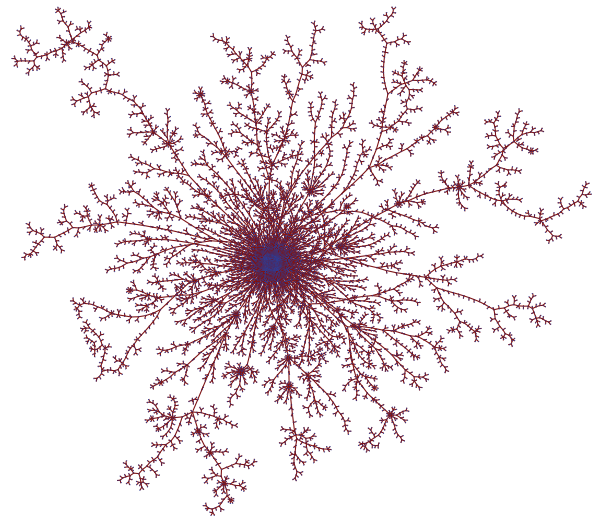


Figure – Résultat 1.

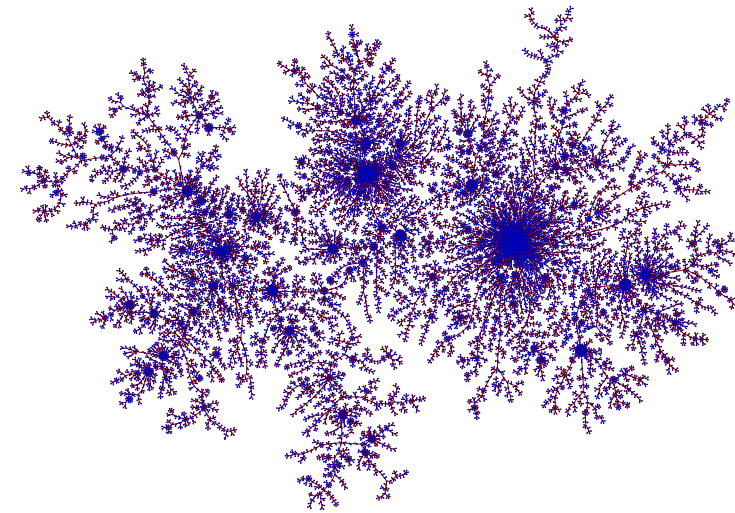


Figure – Résultat 2.

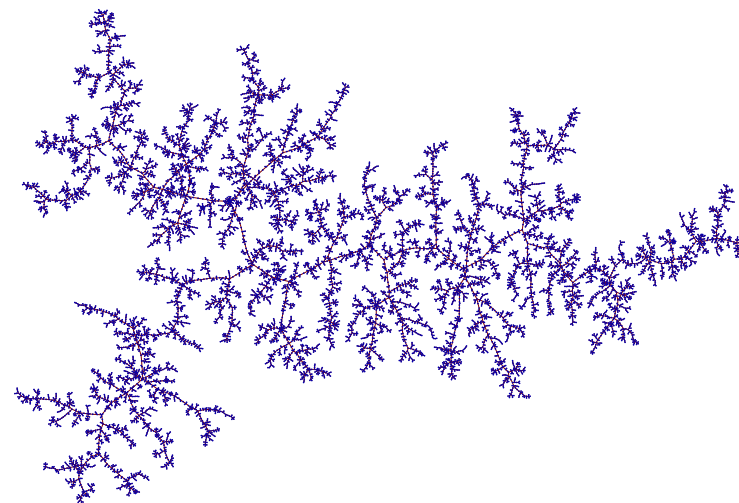


Figure – Résultat 3.

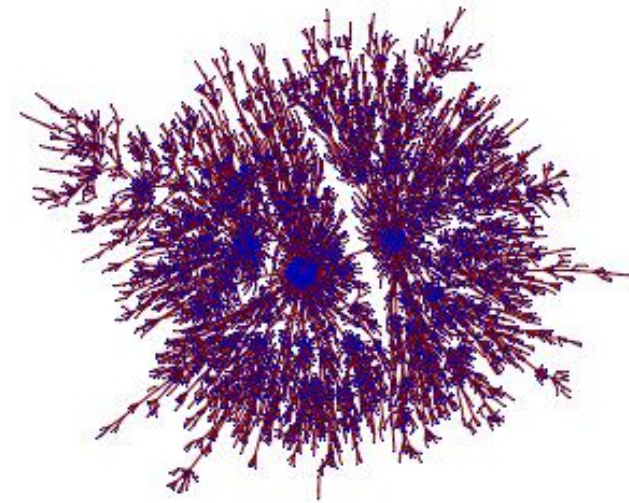


Figure – Résultat 4.

J'ai simulé et dessiné un arbre planaire uniforme à 10000 sommets. Qu'ai-je obtenu ?

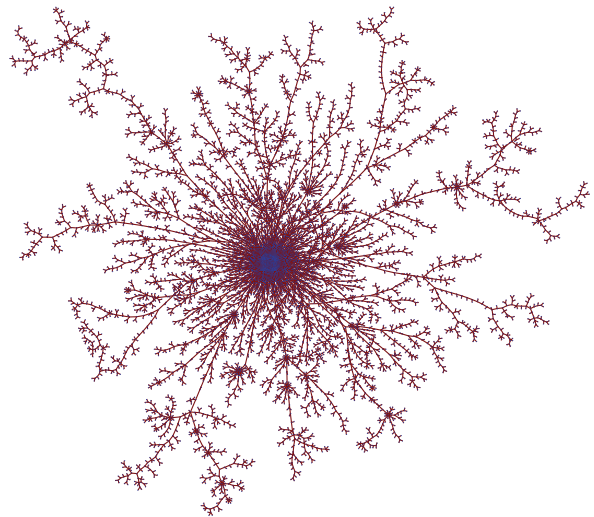


Figure – Résultat 1.

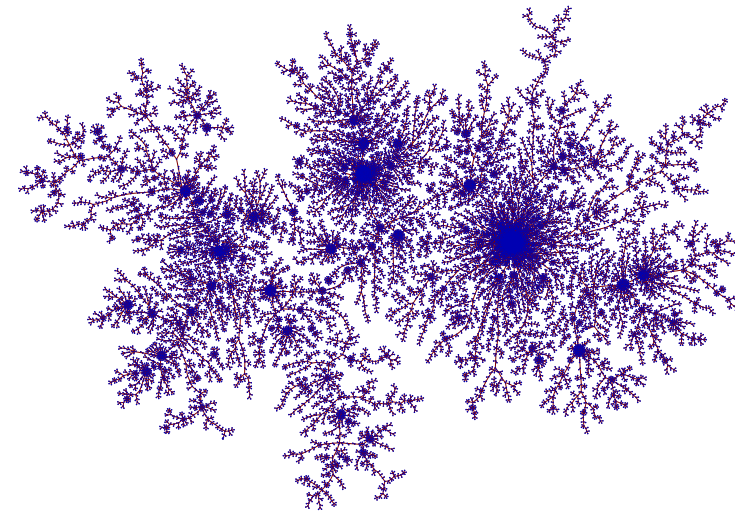


Figure – Résultat 2.

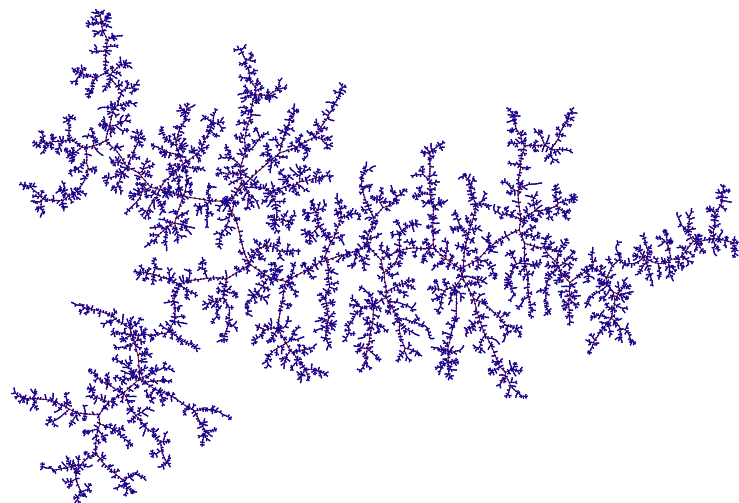


Figure – Résultat 3.

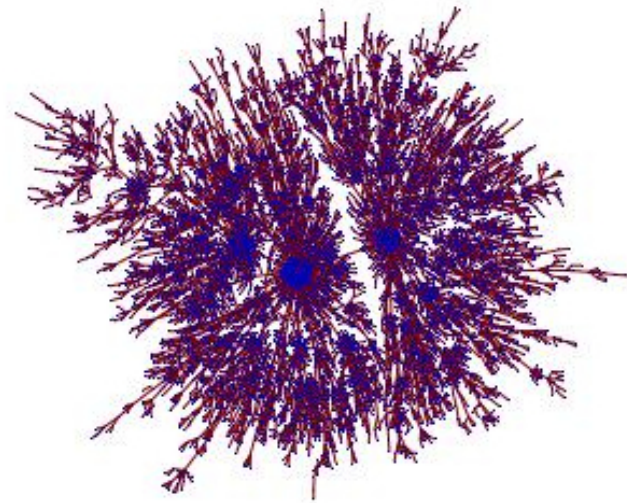
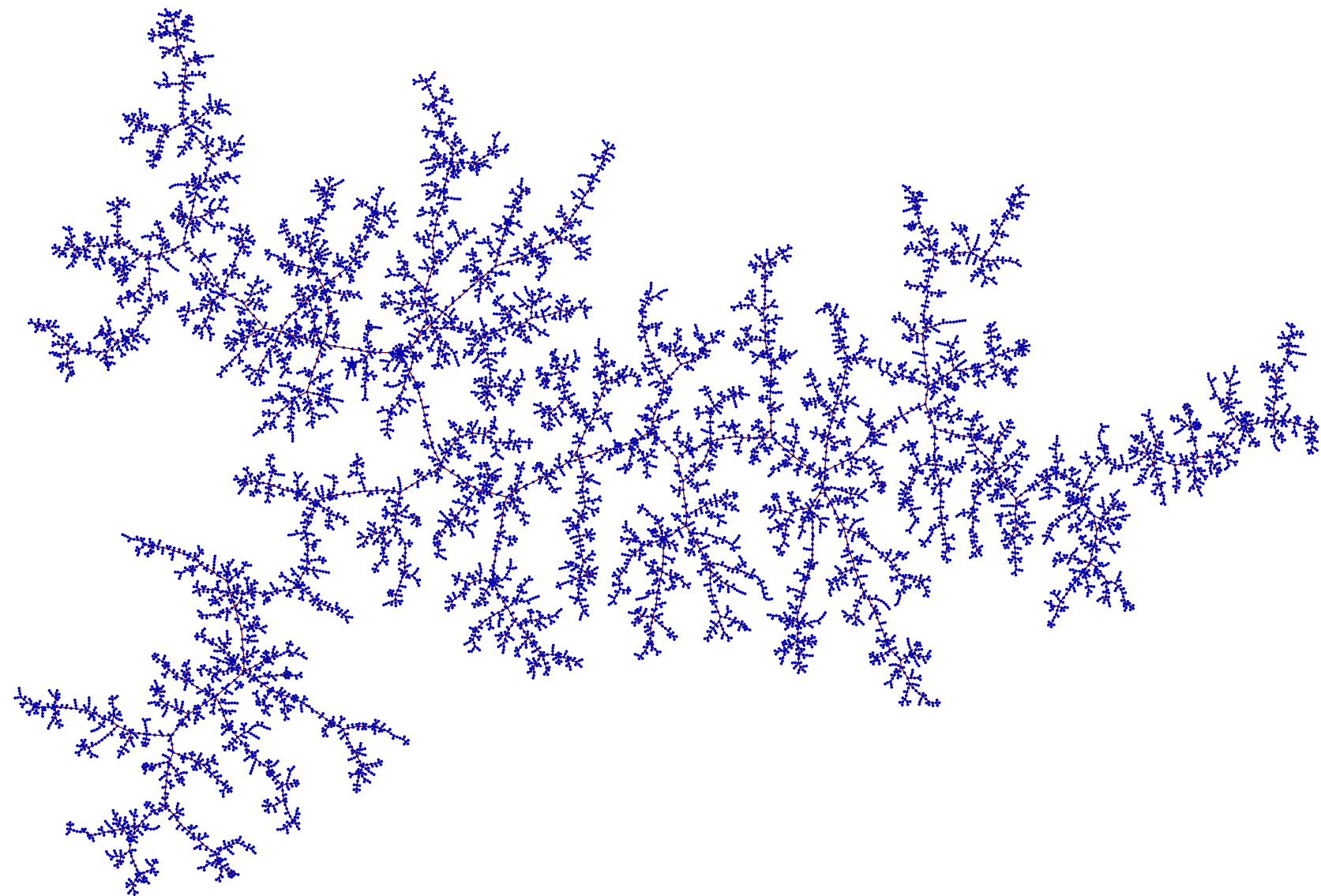
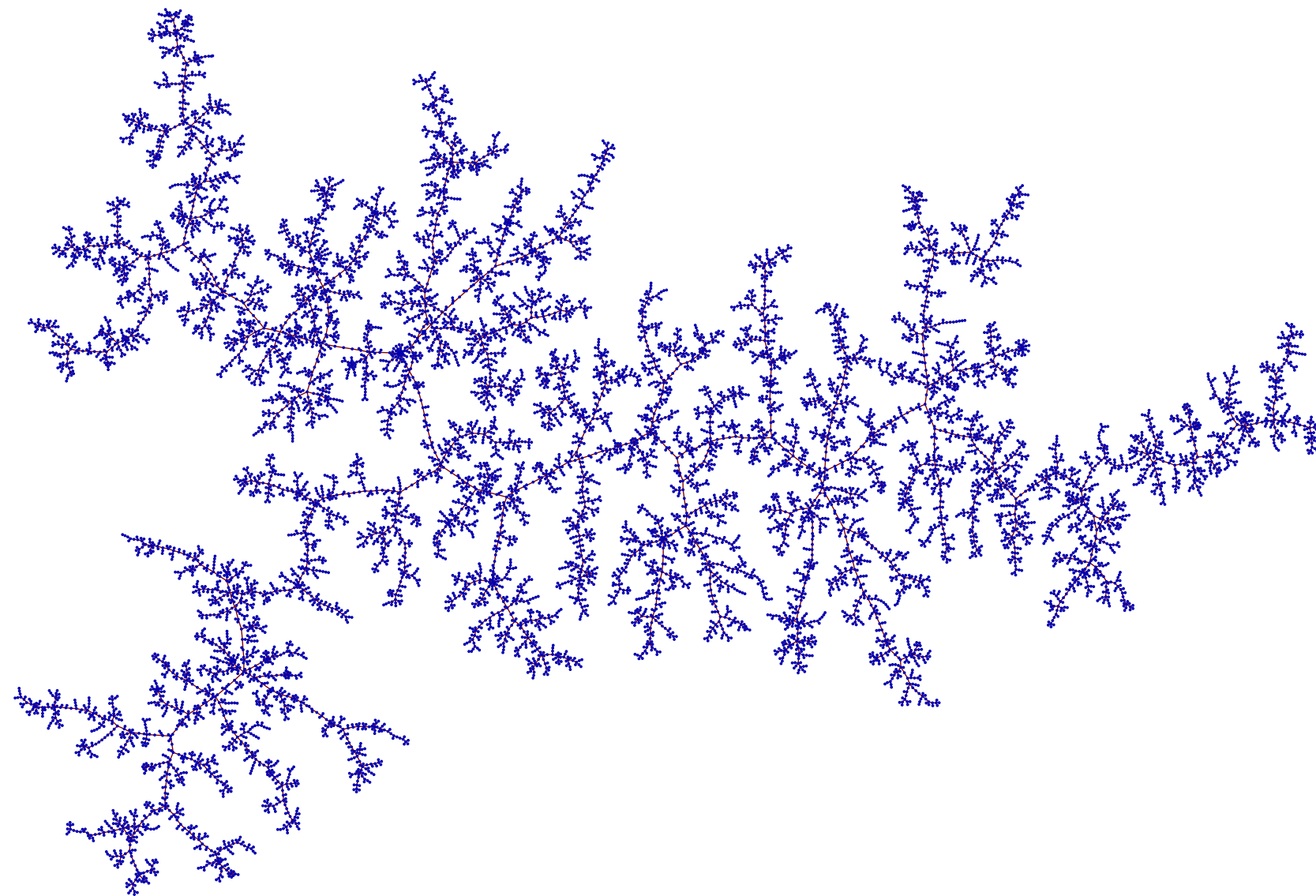


Figure – Résultat 4.

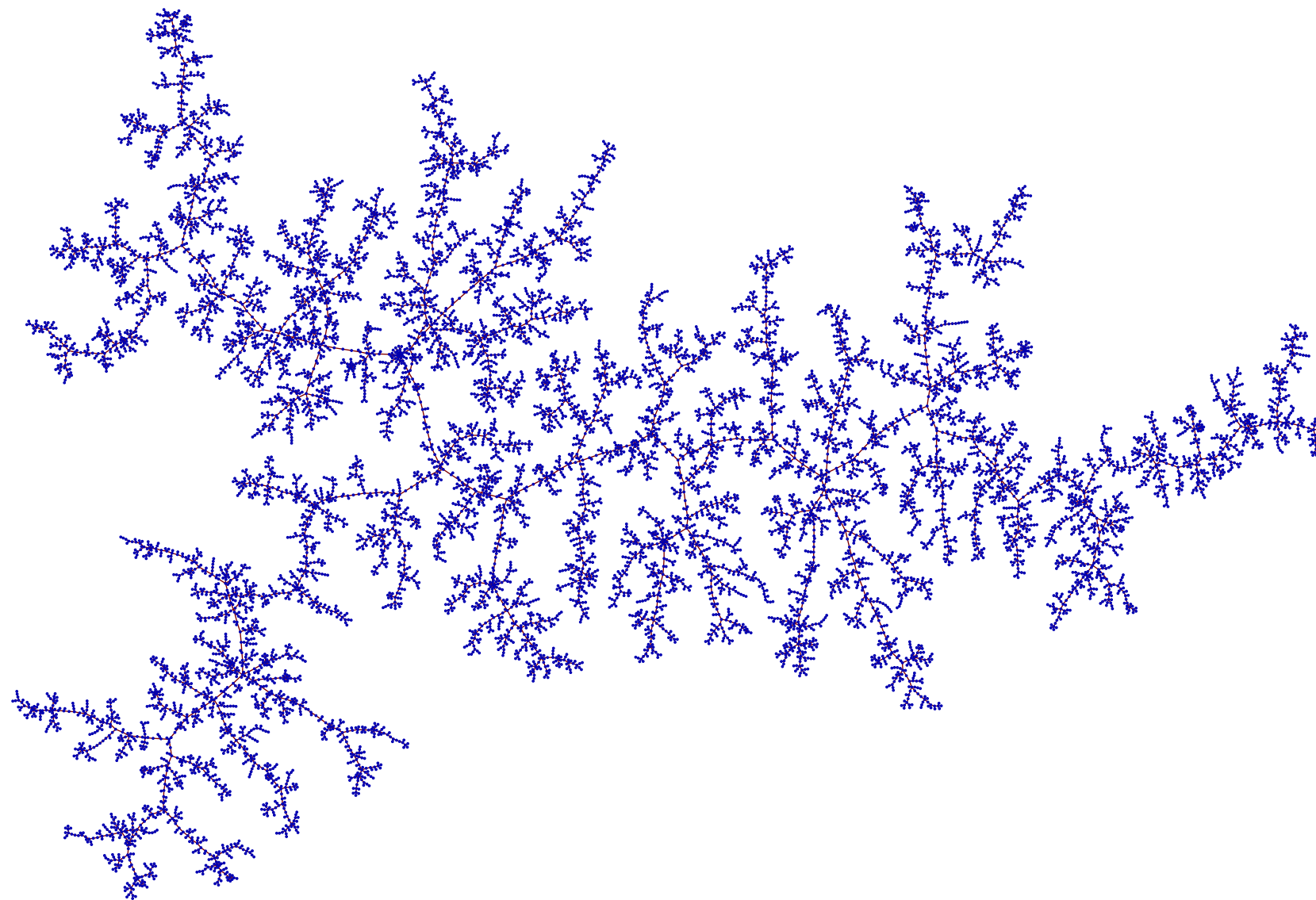


wooclap.com ; code **dma**.





Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.
➤ Quel est l'ordre de grandeur du diamètre de $\mathcal{T}_n$?



Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

➤ Quel est l'ordre de grandeur du diamètre de $\mathcal{T}_n$?

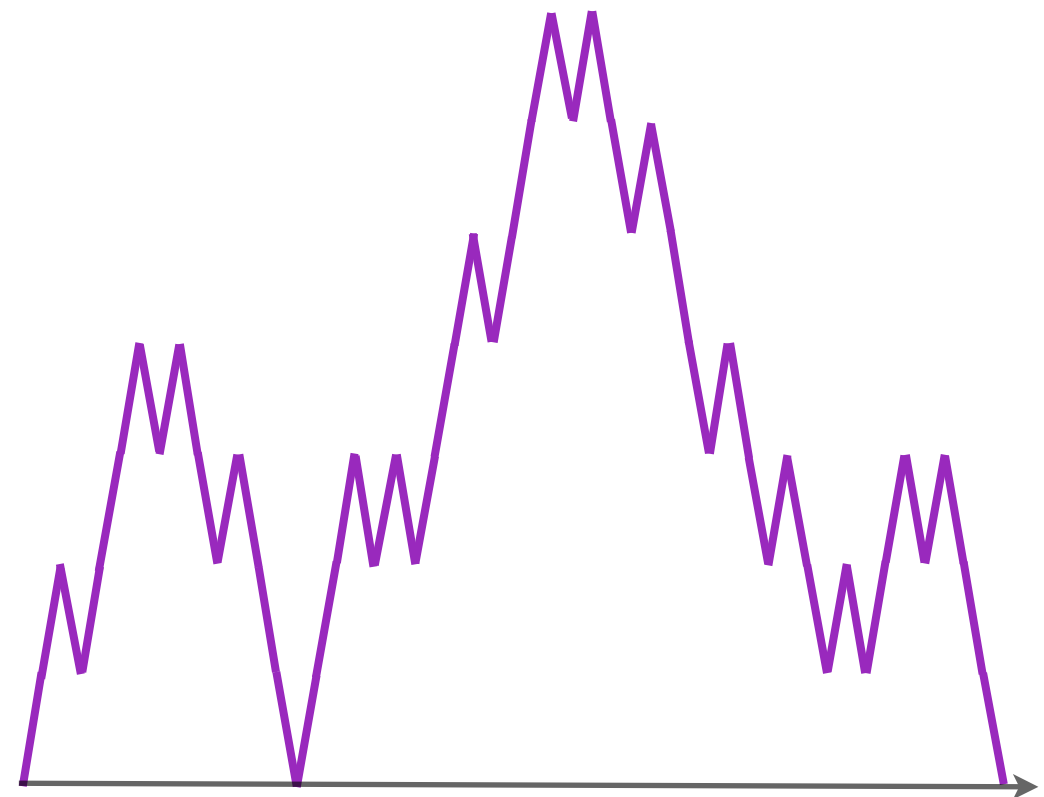
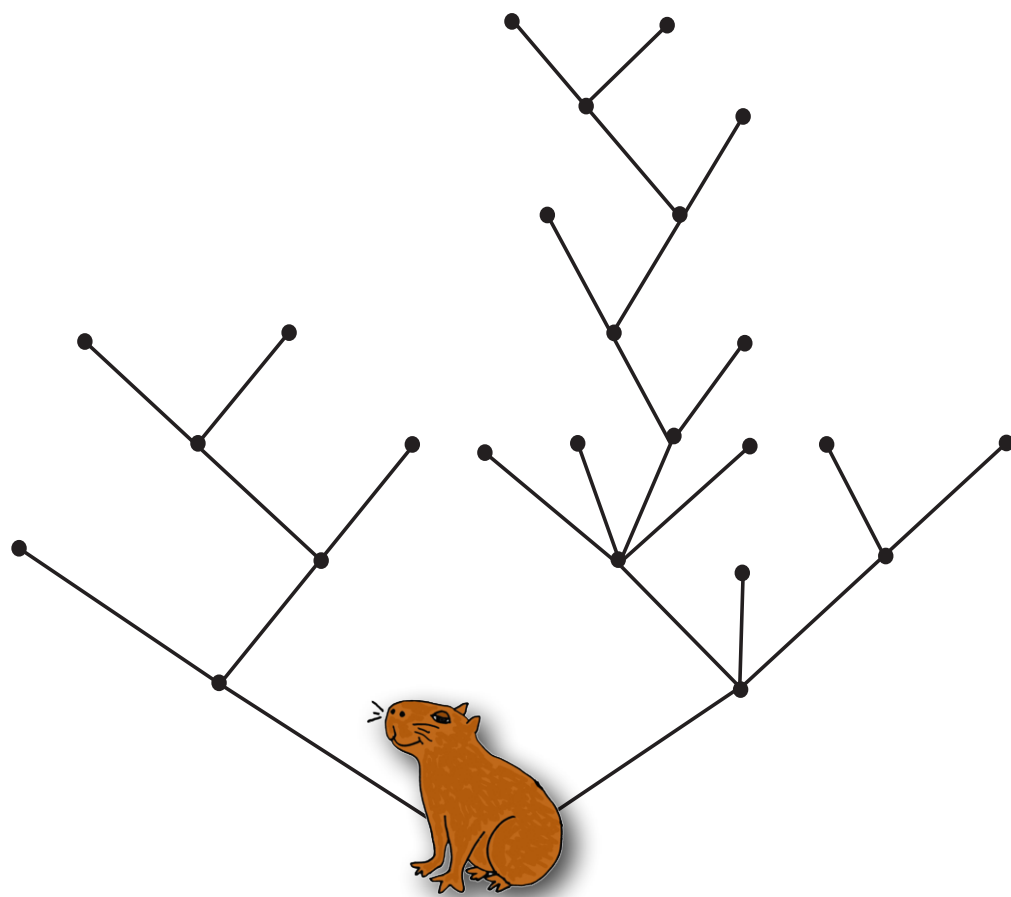
➤ wooclap.com ; code **dma**.

Quel espace métrique pour $\mathcal{T}_n$?

Codage d'un arbre par sa fonction de contour

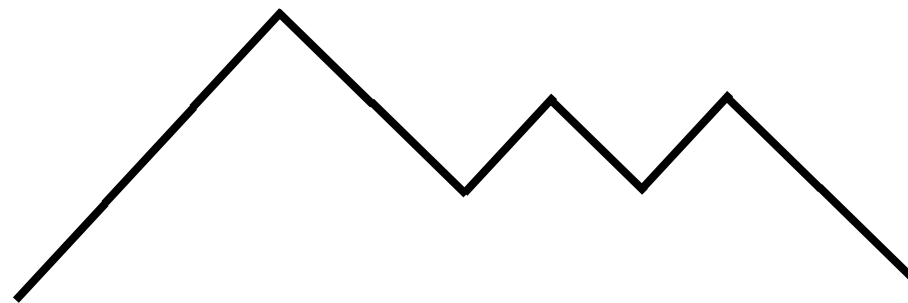


On code un arbre τ par sa fonction de contour $C(\tau)$:



Codage d'un arbre par sa fonction de contour

Connaissant la fonction de contour, il est facile de retrouver l'arbre :



Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

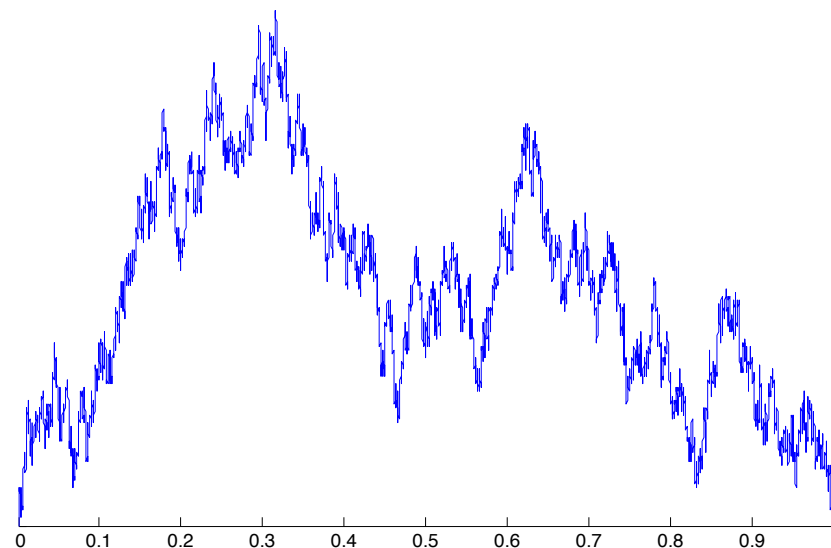
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1}$$

Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1}$$



Limites d'échelle

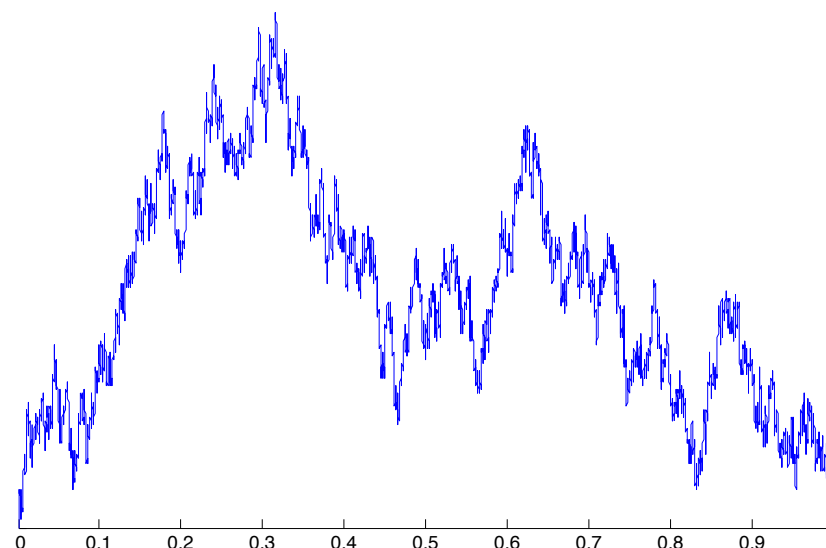
Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

La convergence

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (\mathfrak{e}(t))_{0 \leq t \leq 1},$$

a lieu en loi dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où $\mathfrak{e}$ est l'excursion brownienne normalisée.



Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

La convergence

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (e(t))_{0 \leq t \leq 1},$$

a lieu en loi dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où e est l'excursion brownienne normalisée.

 **Conséquence :** pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\text{Hauteur}(\mathcal{T}_n) > a \cdot \sqrt{2n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P} (\sup e > a)$$

Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

La convergence

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (e(t))_{0 \leq t \leq 1},$$

a lieu en loi dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où e est l'excursion brownienne normalisée.

 **Conséquence** : pour tout $a > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\text{Hauteur}(\mathcal{T}_n) > a \cdot \sqrt{2n} \right) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P} (\sup e > a) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (4k^2 a^2 - 1) e^{-2k^2 a^2} \end{aligned}$$

Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

La convergence

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (\mathfrak{e}(t))_{0 \leq t \leq 1},$$

a lieu en loi dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où $\mathfrak{e}$ est l'excursion brownienne normalisée.

Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

La convergence

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (e(t))_{0 \leq t \leq 1},$$

a lieu en loi dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où e est l'excursion brownienne normalisée.

Pourquoi ?

Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

La convergence

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (e(t))_{0 \leq t \leq 1},$$

a lieu en loi dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où e est l'excursion brownienne normalisée.



$(C_0, \dots, C_{2(n-1)}) \stackrel{(loi)}{=} (S_0, \dots, S_{2(n-1)})$ sous $\mathbb{P}(\dots | S_{2n-2} = 0)$,

où $(S_k)_{k \geq 0}$ est la marche aléatoire de pas ± 1 avec probas $1/2$.

Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

La convergence

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (e(t))_{0 \leq t \leq 1},$$

a lieu en loi dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où e est l'excursion brownienne normalisée.



$$(C_0, \dots, C_{2(n-1)}) \stackrel{(loi)}{=} (S_0, \dots, S_{2(n-1)}) \text{ sous } \mathbb{P}(\dots | S_{2n-2} = 0),$$

où $(S_k)_{k \geq 0}$ est la marche aléatoire de pas ± 1 avec probas $1/2$.

↗ On en déduit le résultat avec une extension du théorème de Donsker au cas conditionné.

Limites d'échelle

Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre plan uniforme à n sommets choisi uniformément au hasard.

Théorème (Aldous '93)

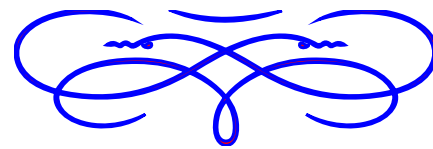
La convergence

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2(n-1)t}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} (e(t))_{0 \leq t \leq 1},$$

a lieu en loi dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme, où e est l'excursion brownienne normalisée.

↗ Extension à une classe plus générale d'**arbres aléatoires planaires** : arbres de Bienaymé–Galton–Watson de loi de reproduction critique, de variance finie, conditionnés à avoir un grand nombre de sommets.

Groupe de lecture : graphes aléatoires



Motivations :

→ sujet fascinant à l'intersection des probabilités, de la combinatoire et de la physique statistique, avec de nombreuses applications

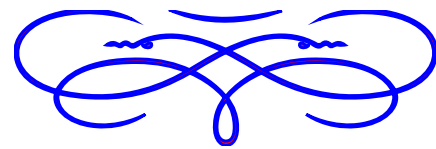
Motivations :

- sujet fascinant à l'intersection des probabilités, de la combinatoire et de la physique statistique, avec de nombreuses applications
- étude des réseaux du monde réel

Motivations :

- ↗ sujet fascinant à l'intersection des probabilités, de la combinatoire et de la physique statistique, avec de nombreuses applications
- ↗ étude des réseaux du monde réel
- ↗ de nombreuses questions, jolies et stimulantes, que nous explorerons au cours du groupe de lecture.

Deux exemples de modèles de graphes aléatoires



L'arbre de Bienaymé–Galton–Watson

L'arbre de Bienaymé–Galton–Watson

Soit $\mu = (\mu(k) : k \geq 0)$ une mesure de probabilité.

L'arbre de Bienaymé–Galton–Watson

Soit $\mu = (\mu(k) : k \geq 0)$ une mesure de probabilité.

- on commence avec un **ancêtre**, qui a un nombre aléatoire de **descendants** suivant la loi μ ;

L'arbre de Bienaymé–Galton–Watson

Soit $\mu = (\mu(k) : k \geq 0)$ une mesure de probabilité.

- on commence avec un **ancêtre**, qui a un nombre aléatoire de **descendants** suivant la loi μ ;
- chacun d'entre eux a lui-même un nombre aléatoire de **descendants** suivant la loi μ , tous indépendants ;

L'arbre de Bienaymé–Galton–Watson

Soit $\mu = (\mu(k) : k \geq 0)$ une mesure de probabilité.

- on commence avec un **ancêtre**, qui a un nombre aléatoire de **descendants** suivant la loi μ ;
- chacun d'entre eux a lui-même un nombre aléatoire de **descendants** suivant la loi μ , tous indépendants ;
- et ainsi de suite.

L'arbre de Bienaymé–Galton–Watson

Soit $\mu = (\mu(k) : k \geq 0)$ une mesure de probabilité.

- on commence avec un **ancêtre**, qui a un nombre aléatoire de **descendants** suivant la loi μ ;
- chacun d'entre eux a lui-même un nombre aléatoire de **descendants** suivant la loi μ , tous indépendants ;
- et ainsi de suite.

→ Quelle est la probabilité que la population s'éteigne ?

L'arbre de Bienaymé–Galton–Watson

Soit $\mu = (\mu(k) : k \geq 0)$ une mesure de probabilité.

- on commence avec un **ancêtre**, qui a un nombre aléatoire de **descendants** suivant la loi μ ;
- chacun d'entre eux a lui-même un nombre aléatoire de **descendants** suivant la loi μ , tous indépendants ;
- et ainsi de suite.

→ Quelle est la probabilité que la population s'éteigne ?

→ À quoi ressemble un grand arbre généalogique ?

Graphes aléatoires d'Erdős-Rényi

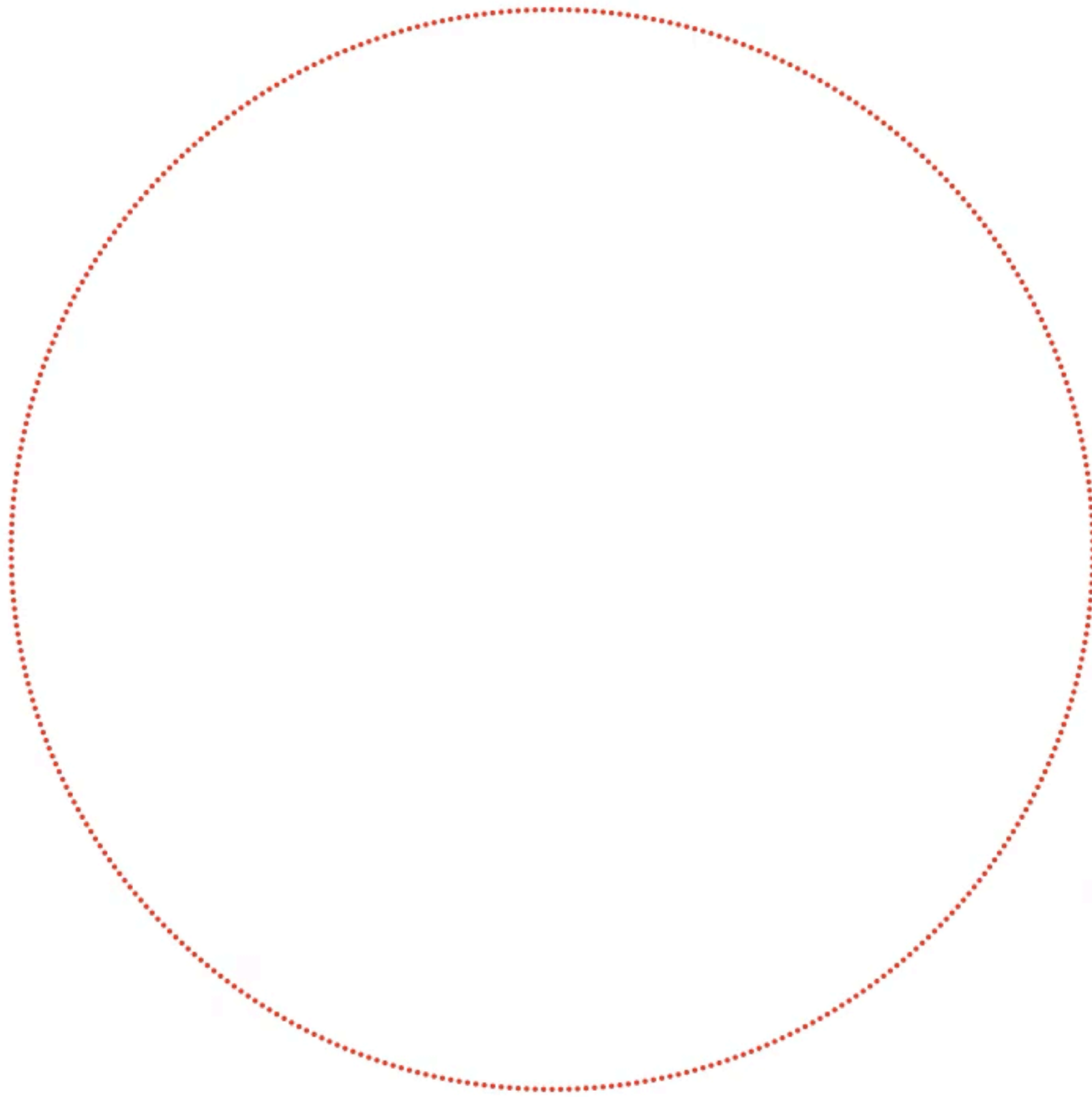
- Considérons n **sommets** étiquetés de 1 à n .

Graphes aléatoires d'Erdős-Rényi

- Considérons n **sommets** étiquetés de 1 à n .
- Fixons $p \in [0, 1]$ et pour chaque $1 \leq i \neq j \leq n$, connectons i et j avec probabilité p (tous les choix sont indépendants).

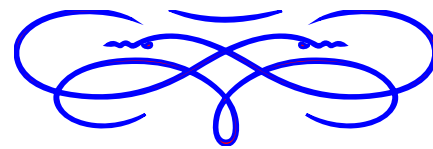
Graphes aléatoires d'Erdős-Rényi

- Considérons n **sommets** étiquetés de 1 à n .
 - Fixons $p \in [0, 1]$ et pour chaque $1 \leq i \neq j \leq n$, connectons i et j avec probabilité p (tous les choix sont indépendants).
- Quelle est l'influence de p sur la structure du graphe (connectivité, taille de la composante maximale, etc.) ?



$p = 0.$

Organisation pratique



Objectifs

- apprendre à communiquer et à présenter les mathématiques oralement

Objectifs

- apprendre à communiquer et à présenter les mathématiques oralement
- étudier un sujet en profondeur en binôme et le structurer de manière appropriée pour un exposé.

Organisation

- ▶ Vous êtes regroupés en *binômes* – sauf exception.

Organisation

- ▶ Vous êtes regroupés en *binômes* – sauf exception.
- ▶ Chaque binôme prépare *deux* exposés consécutifs ensemble (chaque exposé dure 2×45 min).

Organisation

- ▶ Vous êtes regroupés en *binômes* – sauf exception.
- ▶ Chaque binôme prépare *deux* exposés consécutifs ensemble (chaque exposé dure 2×45 min).
- ▶ Les deux exposés sont répartis de manière à peu près égale ($\rightarrow$ AB AB ou AB BA).

Organisation

- ▶ Vous êtes regroupés en *binômes* – sauf exception.
- ▶ Chaque binôme prépare *deux* exposés consécutifs ensemble (chaque exposé dure 2×45 min).
- ▶ Les deux exposés sont répartis de manière à peu près égale ($\rightarrow$ AB AB ou AB BA).
- ▶ Le travail en binôme permet de discuter, apprendre ensemble et faire des répétitions.

Organisation

- ▶ Vous êtes regroupés en *binômes* – sauf exception.
- ▶ Chaque binôme prépare *deux* exposés consécutifs ensemble (chaque exposé dure 2×45 min).
- ▶ Les deux exposés sont répartis de manière à peu près égale ($\rightarrow$ AB AB ou AB BA).
- ▶ Le travail en binôme permet de discuter, apprendre ensemble et faire des répétitions.
- ▶ Un rendez-vous avec moi quelques jours avant chaque exposé :

Organisation

- ▶ Vous êtes regroupés en *binômes* – sauf exception.
- ▶ Chaque binôme prépare *deux* exposés consécutifs ensemble (chaque exposé dure 2×45 min).
- ▶ Les deux exposés sont répartis de manière à peu près égale ($\rightarrow$ AB AB ou AB BA).
- ▶ Le travail en binôme permet de discuter, apprendre ensemble et faire des répétitions.
- ▶ Un rendez-vous avec moi quelques jours avant chaque exposé :
 - ▶ Vous venez bien préparés (sujet le plus possible maîtrisé, exposé préparé voire répété)

Organisation

- ▶ Vous êtes regroupés en *binômes* – sauf exception.
- ▶ Chaque binôme prépare *deux* exposés consécutifs ensemble (chaque exposé dure 2×45 min).
- ▶ Les deux exposés sont répartis de manière à peu près égale ($\rightarrow$ AB AB ou AB BA).
- ▶ Le travail en binôme permet de discuter, apprendre ensemble et faire des répétitions.
- ▶ Un rendez-vous avec moi quelques jours avant chaque exposé :
 - ▶ Vous venez bien préparés (sujet le plus possible maîtrisé, exposé préparé voire répété)
 - ▶ Clarification des questions, discussion de la structure de l'exposé et échanges sur l'intuition.

Organisation

- ▶ Vous êtes regroupés en *binômes* – sauf exception.
- ▶ Chaque binôme prépare *deux* exposés consécutifs ensemble (chaque exposé dure 2×45 min).
- ▶ Les deux exposés sont répartis de manière à peu près égale ($\rightarrow$ AB AB ou AB BA).
- ▶ Le travail en binôme permet de discuter, apprendre ensemble et faire des répétitions.
- ▶ Un rendez-vous avec moi quelques jours avant chaque exposé :
 - ▶ Vous venez bien préparés (sujet le plus possible maîtrisé, exposé préparé voire répété)
 - ▶ Clarification des questions, discussion de la structure de l'exposé et échanges sur l'intuition.
- ▶ Participation active : posez des questions pendant l'exposé de vos camarades !