

Martingales.

Exemples et Applications.



Igor Kortchemski

CNRS & DMA, ENS Paris

Journées ALEA 2026

<https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/ALEA/>

Martingales

Martingales

 18ème siècle : stratégie de jeu.

Martingales

 18ème siècle : stratégie de jeu.

2007, Jérôme Kerviel : « J'ai découvert une martingale sur le contrat à terme sur le Dax en jouant sur les horaires d'ouverture du marché ».

Martingales

↗ 18ème siècle : stratégie de jeu.

2007, Jérôme Kerviel : « J'ai découvert une martingale sur le contrat à terme sur le Dax en jouant sur les horaires d'ouverture du marché ».

↗ Historiquement, stratégie de jeu "absurde" (doubler la mise jusqu'à ce que l'on gagne).

Martingales

↗ 18ème siècle : stratégie de jeu.

2007, Jérôme Kerviel : « J'ai découvert une martingale sur le contrat à terme sur le Dax en jouant sur les horaires d'ouverture du marché ».

↗ Historiquement, stratégie de jeu "absurde" (doubler la mise jusqu'à ce que l'on gagne).

« joua a la martegalo » en provinçal

Martingales

↗ 18ème siècle : stratégie de jeu.

2007, Jérôme Kerviel : « J'ai découvert une martingale sur le contrat à terme sur le Dax en jouant sur les horaires d'ouverture du marché ».

↗ Historiquement, stratégie de jeu "absurde" (doubler la mise jusqu'à ce que l'on gagne).

« joua a la martegalo » en provinçal

martegal / martegalo : habitant de Martigues

Martingales

↗ 18ème siècle : stratégie de jeu.

2007, Jérôme Kerviel : « J'ai découvert une martingale sur le contrat à terme sur le Dax en jouant sur les horaires d'ouverture du marché ».

↗ Historiquement, stratégie de jeu "absurde" (doubler la mise jusqu'à ce que l'on gagne).

« joua a la martegalo » en provinçal

martegal / martegalo : habitant de Martigues

↗ 15ème siècle : chausses à la martingale

Martingales

↗ 18ème siècle : stratégie de jeu.

2007, Jérôme Kerviel : « J'ai découvert une martingale sur le contrat à terme sur le Dax en jouant sur les horaires d'ouverture du marché ».

↗ Historiquement, stratégie de jeu "absurde" (doubler la mise jusqu'à ce que l'on gagne).

« joua a la martegalo » en provinçal

martegal / martegalo : habitant de Martigues

↗ 15ème siècle : chausses à la martingale

1534, Rabelais : « un pont-levis de cul pour plus aisément fienter »

Martingales

↗ 18ème siècle : stratégie de jeu.

2007, Jérôme Kerviel : « J'ai découvert une martingale sur le contrat à terme sur le Dax en jouant sur les horaires d'ouverture du marché ».

↗ Historiquement, stratégie de jeu "absurde" (doubler la mise jusqu'à ce que l'on gagne).

« joua a la martegalo » en provinçal

martegal / martegalo : habitant de Martigues

↗ 15ème siècle : chausses à la martingale

1534, Rabelais : « un pont-levis de cul pour plus aisément fienter »

↗ 1939, Ville : martingale et système de jeu.

Martingales

↗ 18ème siècle : stratégie de jeu.

2007, Jérôme Kerviel : « J'ai découvert une martingale sur le contrat à terme sur le Dax en jouant sur les horaires d'ouverture du marché ».

↗ Historiquement, stratégie de jeu "absurde" (doubler la mise jusqu'à ce que l'on gagne).

« joua a la martegalo » en provinçal

martegal / martegalo : habitant de Martigues

↗ 15ème siècle : chausses à la martingale

1534, Rabelais : « un pont-levis de cul pour plus aisément fienter »

↗ 1939, Ville : martingale et système de jeu. Popularisé par Doob dans les années 1950.

Plan

Plan

O. RAPPELS PROBABILISTES

- 1). ESPÉRANCE CONDITIONNELLE DISCRÈTE
- 2). MODES DE CONVERGENCE

Plan

O. RAPPELS PROBABILISTES

- 1). ESPÉRANCE CONDITIONNELLE DISCRÈTE
- 2). MODES DE CONVERGENCE

I. MARTINGALES ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

- 1). DÉFINITIONS
- 2). OPÉRATIONS SUR LES MARTINGALES

Plan

O. RAPPELS PROBABILISTES

- 1). ESPÉRANCE CONDITIONNELLE DISCRÈTE
- 2). MODES DE CONVERGENCE

I. MARTINGALES ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

- 1). DÉFINITIONS
- 2). OPÉRATIONS SUR LES MARTINGALES

II. TEMPS D'ARRÊT, THÉORÈME D'ARRÊT

- 1). DÉFINITIONS
- 2). THÉORÈME D'ARRÊT
- 3). APPLICATION : ARRÊT OPTIMAL

Plan

III. CONVERGENCE DES SUR/SOUS MARTINGALES

- 1). CONVERGENCE P.S.
- 2). CONVERGENCE DANS L^p .
- 3). EXEMPLE : PROCESSUS DE BRANCHEMENT.

Plan

III. CONVERGENCE DES SUR/SOUS MARTINGALES

- 1). CONVERGENCE P.S.
- 2). CONVERGENCE DANS L^p .
- 3). EXEMPLE : PROCESSUS DE BRANCHEMENT.

IV. INÉGALITÉS DE CONCENTRATION

- 1). INÉGALITÉ MAXIMALE DE DOOB
- 2). INÉGALITÉS DE CONCENTRATION.
- 3). APPLICATION : NOMBRE CHROMATIQUE DE GRAPHS ALÉATOIRES.

1). ESPÉRANCE CONDITIONNELLE DISCRÈTE



Rappels

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable E .

Rappels

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable E .

► $X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow E$ est une fonction ;

Rappels

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable E .

- ▶ $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow E$ est une fonction ;
- ▶ la loi de X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur E définie par $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ pour $x \in E$.

Rappels

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable E .

- ▶ $X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow E$ est une fonction ;
- ▶ la loi de X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur E définie par $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ pour $x \in E$.

Lorsque $E \subset [0, \infty]$:

- ▶ $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) \in [0, \infty]$ est l'espérance de X .

Rappels

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable E .

- ▶ $X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow E$ est une fonction ;
- ▶ la loi de X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur E définie par $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ pour $x \in E$.

Lorsque $E \subset [0, \infty]$:

- ▶ $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) \in [0, \infty]$ est l'espérance de X .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$:

- ▶ On dit que X est L^1 quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et on écrit $X \in L^1$.

Rappels

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable E .

- ▶ $X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow E$ est une fonction ;
- ▶ la loi de X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur E définie par $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ pour $x \in E$.

Lorsque $E \subset [0, \infty]$:

- ▶ $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) \in [0, \infty]$ est l'espérance de X .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$:

- ▶ On dit que X est L^1 quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et on écrit $X \in L^1$.
- ▶ Si $X \in L^1$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) \in \mathbb{R}$ est l'espérance de X .

Rappels

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable E .

- ▶ $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow E$ est une fonction ;
- ▶ la loi de X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur E définie par $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ pour $x \in E$.

Lorsque $E \subset [0, \infty]$:

- ▶ $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) \in [0, \infty]$ est l'espérance de X .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$:

- ▶ On dit que X est L^1 quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et on écrit $X \in L^1$.
- ▶ Si $X \in L^1$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) \in \mathbb{R}$ est l'espérance de X .
- ▶ On dit que X est dans L^p quand $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.

Rappels

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable E .

- ▶ $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow E$ est une fonction ;
- ▶ la loi de X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur E définie par $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ pour $x \in E$.

Lorsque $E \subset [0, \infty]$:

- ▶ $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) \in [0, \infty]$ est l'espérance de X .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$:

- ▶ On dit que X est L^1 quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et on écrit $X \in L^1$.
- ▶ Si $X \in L^1$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) \in \mathbb{R}$ est l'espérance de X .
- ▶ On dit que X est dans L^p quand $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.

► $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

- ▶ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- ▶ $A \in \mathcal{A}$ est dit p.s. si $\mathbb{P}(A) = 1$.

- ▶ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- ▶ $A \in \mathcal{A}$ est dit p.s. si $\mathbb{P}(A) = 1$.
- ▶ X v.a. à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, dans L^1 .

- ▶ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- ▶ $A \in \mathcal{A}$ est dit p.s. si $\mathbb{P}(A) = 1$.
- ▶ X v.a. à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, dans L^1 .
- ▶ Y v.a. à valeurs dans F dénombrable.

- ▶ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- ▶ $A \in \mathcal{A}$ est dit p.s. si $\mathbb{P}(A) = 1$.
- ▶ X v.a. à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, dans L^1 .
- ▶ Y v.a. à valeurs dans F dénombrable.

On pose $F_Y := \{y \in F : \mathbb{P}(Y = y) > 0\}$.

- ▶ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- ▶ $A \in \mathcal{A}$ est dit p.s. si $\mathbb{P}(A) = 1$.
- ▶ X v.a. à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, dans L^1 .
- ▶ Y v.a. à valeurs dans F dénombrable.

On pose $F_Y := \{y \in F : \mathbb{P}(Y = y) > 0\}$.

Définition.

On note $\mathbb{E}[X \mid Y]$ la variable aléatoire $\phi(Y)$ où la fonction ϕ est définie comme suit.

- ▶ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- ▶ $A \in \mathcal{A}$ est dit p.s. si $\mathbb{P}(A) = 1$.
- ▶ X v.a. à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, dans L^1 .
- ▶ Y v.a. à valeurs dans F dénombrable.

On pose $F_Y := \{y \in F : \mathbb{P}(Y = y) > 0\}$.

Définition.

On note $\mathbb{E}[X \mid Y]$ la variable aléatoire $\phi(Y)$ où la fonction ϕ est définie comme suit. Pour $y \in F$,

$$\phi(y) = \begin{cases} \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) & \text{si } y \in F_Y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $y \in F$, $\phi(y)$ peut être vu comme l'espérance de X par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}_y$ définie par $\mathbb{P}_y(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{Y=y\})}{\mathbb{P}(Y=y)}$ pour $A \in \mathcal{A}$.

Propriétés

- ▶ [Propriété de croissance]
- ▶ [Propriété de linéarité]
- ▶ [Propriété d'espérance totale]
- ▶ [Propriété de sortie]

Propriétés

- ▶ [Propriété de croissance]

Si $X \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{Y}] \geq 0$ p.s.

- ▶ [Propriété de linéarité]

- ▶ [Propriété d'espérance totale]

- ▶ [Propriété de sortie]

Propriétés

► [Propriété de croissance]

Si $X \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}[X | Y] \geq 0$ p.s.

En particulier, si $X \geq X'$ p.s. alors $\mathbb{E}[X | Y] \geq \mathbb{E}[X' | Y]$ p.s.

► [Propriété de linéarité]

► [Propriété d'espérance totale]

► [Propriété de sortie]

Propriétés

► [Propriété de croissance]

$$\text{Si } X \geq 0 \text{ p.s., alors } \mathbb{E}[X | Y] \geq 0 \text{ p.s.}$$

En particulier, si $X \geq X'$ p.s. alors $\mathbb{E}[X | Y] \geq \mathbb{E}[X' | Y]$ p.s.

► [Propriété de linéarité] Pour $Z \in L^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[X + \lambda Z | Y] = \mathbb{E}[X | Y] + \lambda \mathbb{E}[Z | Y] \text{ p.s.}$$

► [Propriété d'espérance totale]

► [Propriété de sortie]

Propriétés

► [Propriété de croissance]

$$\text{Si } X \geq 0 \text{ p.s., alors } \mathbb{E}[X | Y] \geq 0 \text{ p.s.}$$

En particulier, si $X \geq X'$ p.s. alors $\mathbb{E}[X | Y] \geq \mathbb{E}[X' | Y]$ p.s.

► [Propriété de linéarité] Pour $Z \in L^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[X + \lambda Z | Y] = \mathbb{E}[X | Y] + \lambda \mathbb{E}[Z | Y] \text{ p.s.}$$

► [Propriété d'espérance totale]

$$\mathbb{E}[X | Y] \text{ est } L^1 \text{ et } \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}[X].$$

► [Propriété de sortie]

Propriétés

► [Propriété de croissance]

$$\text{Si } X \geq 0 \text{ p.s., alors } \mathbb{E}[X | Y] \geq 0 \text{ p.s.}$$

En particulier, si $X \geq X'$ p.s. alors $\mathbb{E}[X | Y] \geq \mathbb{E}[X' | Y]$ p.s.

► [Propriété de linéarité] Pour $Z \in L^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[X + \lambda Z | Y] = \mathbb{E}[X | Y] + \lambda \mathbb{E}[Z | Y] \text{ p.s.}$$

► [Propriété d'espérance totale]

$$\mathbb{E}[X | Y] \text{ est } L^1 \text{ et } \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}[X].$$

► [Propriété de sortie] Pour $h : F \rightarrow \mathbb{R}$ bornée :

$$\mathbb{E}[h(Y)X | Y] = h(Y)\mathbb{E}[X | Y] \text{ p.s.}$$

Propriétés

► [Propriété de croissance]

$$\text{Si } X \geq 0 \text{ p.s., alors } \mathbb{E}[X | Y] \geq 0 \text{ p.s.}$$

En particulier, si $X \geq X'$ p.s. alors $\mathbb{E}[X | Y] \geq \mathbb{E}[X' | Y]$ p.s.

► [Propriété de linéarité] Pour $Z \in L^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[X + \lambda Z | Y] = \mathbb{E}[X | Y] + \lambda \mathbb{E}[Z | Y] \text{ p.s.}$$

► [Propriété d'espérance totale]

$$\mathbb{E}[X | Y] \text{ est } L^1 \text{ et } \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}[X].$$

► [Propriété de sortie] Pour $h : F \rightarrow \mathbb{R}$ bornée :

$$\mathbb{E}[h(Y)X | Y] = h(Y)\mathbb{E}[X | Y] \text{ p.s.}$$

En particulier, $\mathbb{E}[h(Y) | Y] = h(Y)$ p.s.

Propriétés

- ▶ [Propriété de convexité - inégalité de Jensen]

Propriétés

► [Propriété de convexité - inégalité de Jensen]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Si $X \in L^1$ et $f(X) \in L^1$, alors

$$\mathbb{E}[f(X) \mid Y] \geq f(\mathbb{E}[X \mid Y]) \text{ p.s.}$$

Propriétés

► [Propriété de convexité - inégalité de Jensen]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Si $X \in L^1$ et $f(X) \in L^1$, alors

$$\mathbb{E}[f(X) \mid Y] \geq f(\mathbb{E}[X \mid Y]) \text{ p.s.}$$

En particulier, $|\mathbb{E}[X \mid Y]| \leq \mathbb{E}[|X| \mid Y] \text{ p.s.}$

Propriétés

- ▶ [Propriété d'emboîtement]

Propriétés

On dit qu'une v.a. Y est Z -mesurable si $Y = F(Z)$ pour une fonction F .

- [Propriété d'emboîtement]

Propriétés

On dit qu'une v.a. Y est Z -mesurable si $Y = F(Z)$ pour une fonction F .

► [Propriété d'emboîtement]

Si Y est Z -mesurable :

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Z] \mid Y].$$

Propriétés

On dit qu'une v.a. Y est Z -mesurable si $Y = F(Z)$ pour une fonction F .

► [Propriété d'emboîtement]

Si Y est Z -mesurable :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Z] | Y].$$

↪ En particulier, pour $1 \leq i \leq n$:

$$\mathbb{E}[X | Y_1, \dots, Y_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y_1, \dots, Y_n] | Y_1, \dots, Y_i].$$

Propriétés

On dit qu'une v.a. Y est Z -mesurable si $Y = F(Z)$ pour une fonction F .

► [Propriété d'emboîtement]

Si Y est Z -mesurable :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Z] | Y].$$

↪ En particulier, pour $1 \leq i \leq n$:

$$\mathbb{E}[X | Y_1, \dots, Y_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y_1, \dots, Y_n] | Y_1, \dots, Y_i].$$

Ici notation utile :

$$\mathbb{E}[X | Y_1, \dots, Y_i] = \mathbb{E}[X | (Y_1, \dots, Y_i)].$$

Propriétés liées à l'indépendance

- ▶ [Propriété d'indépendance]
- ▶ [Propriété de sortie par indépendance]

Propriétés liées à l'indépendance

► [Propriété d'indépendance]

Si X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X] \text{ p.s.}$$

► [Propriété de sortie par indépendance]

Propriétés liées à l'indépendance

► [Propriété d'indépendance]

Si X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X] \text{ p.s.}$$

► [Propriété de sortie par indépendance]

Pour Z v .a. à valeurs dans $E' \subset \mathbb{R}$, dénombrable borné :

si Z est indépendante de (X, Y) , alors $\mathbb{E}[XZ \mid Y] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[X \mid Y]$ p.s.

2). MODES DE CONVERGENCE DE VARIABLES ALÉATOIRES



Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

- ▶ [Convergence presque sûre]
- ▶ [Convergence en probabilité]
- ▶ [Convergence dans L^p]

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

► [Convergence presque sûre]

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

► [Convergence en probabilité]

► [Convergence dans L^p]

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

► [Convergence presque sûre]

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

► [Convergence en probabilité]

On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

► [Convergence dans L^p]

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

► [Convergence presque sûre]

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

► [Convergence en probabilité]

On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

► [Convergence dans L^p]

On dit que X_n converge dans L^p vers X si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0.$$

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

► [Convergence presque sûre]

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

► [Convergence en probabilité]

On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

► [Convergence dans L^p]

On dit que X_n converge dans L^p vers X si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0.$$

↗ Convergence p.s. implique convergence en probabilité.

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

► [Convergence presque sûre]

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

► [Convergence en probabilité]

On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

► [Convergence dans L^p]

On dit que X_n converge dans L^p vers X si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0.$$

↗ Convergence p.s. implique convergence en probabilité.

⚡ Réciproque fautive : prendre $X = 0$, (X_n) indépendantes avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

► [Convergence presque sûre]

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

► [Convergence en probabilité]

On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

► [Convergence dans L^p]

On dit que X_n converge dans L^p vers X si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0.$$

↗ Convergence p.s. implique convergence en probabilité.

↗ Convergence L^p implique $\mathbb{E}[X_n^p] \rightarrow \mathbb{E}[X^p]$, $\mathbb{E}[|X_n|^p] \rightarrow \mathbb{E}[|X|^p]$.

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

► [Convergence presque sûre]

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

► [Convergence en probabilité]

On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

► [Convergence dans L^p]

On dit que X_n converge dans L^p vers X si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0.$$

↗ Convergence p.s. implique convergence en probabilité.

↗ Convergence L^p implique $\mathbb{E}[X_n^p] \rightarrow \mathbb{E}[X^p]$, $\mathbb{E}[|X_n|^p] \rightarrow \mathbb{E}[|X|^p]$.

⚡ Réciproque fautive : prendre $X, (X_n)$ i.i.d..

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

► [Convergence presque sûre]

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

► [Convergence en probabilité]

On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

► [Convergence dans L^p]

On dit que X_n converge dans L^p vers X si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0.$$

↗ Convergence p.s. implique convergence en probabilité.

↗ Convergence L^p implique $\mathbb{E}[X_n^p] \rightarrow \mathbb{E}[X^p]$, $\mathbb{E}[|X_n|^p] \rightarrow \mathbb{E}[|X|^p]$.

↗ Convergence L^p implique convergence en probabilité.

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles.

► [Convergence presque sûre]

On dit que X_n converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

► [Convergence en probabilité]

On dit que X_n converge en probabilité vers X si

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

► [Convergence dans L^p]

On dit que X_n converge dans L^p vers X si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0.$$

↗ Convergence p.s. implique convergence en probabilité.

↗ Convergence L^p implique $\mathbb{E}[X_n^p] \rightarrow \mathbb{E}[X^p]$, $\mathbb{E}[|X_n|^p] \rightarrow \mathbb{E}[|X|^p]$.

↗ Convergence L^p implique convergence en probabilité.

⚡ Réciproque fautive : prendre (X_n) i.i.d. indépendantes, $p = 1$, $X = 1$,
 $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

Uniforme intégrabilité

- ▶ [De la convergence en probabilité à la convergence L^1]

Uniforme intégrabilité

- [De la convergence en probabilité à la convergence L^1]

Théorème.

Soient X_n, X des variables aléatoires dans L^1 .

$$X_n \rightarrow X \text{ dans } L^1$$

$$\iff$$

$X_n \rightarrow X$ en probabilité et $(X_n)_{n \geq 1}$ uniformément intégrable.

Uniforme intégrabilité

- [De la convergence en probabilité à la convergence L^1]

Théorème.

Soient X_n, X des variables aléatoires dans L^1 .

$$X_n \rightarrow X \text{ dans } L^1$$

$$\iff$$

$X_n \rightarrow X$ en probabilité et $(X_n)_{n \geq 1}$ uniformément intégrable.

Définition.

$(X_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable si

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} [|X_n| \mathbb{1}_{|X_n| \geq M}] \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$