Igor Kortchemski

Martingales. Exemples et application.

http://igor.kortchemski.math.cnrs.fr/ALEA/

Toutes les v.a. mises en jeu sont supposées discrètes et définies sur le même espace de probabilité.

Rappel : • Pour X, Y v.a., on dit que X est Y-mesurable s'il existe une fonction f telle que $X = f(Y)$

On notera (M_n) pour la suite $(M_n)_{n \geq 0}$.

I Martingales et premières propriétés

1) Définitions

Déf Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. réelles, $(Y_n)_{n \geq 0}$ des v.a.

On dit $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale pour $(Y_n)_{n \geq 0}$ si :

1. $\forall n \geq 0$, $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$
2. $\forall n \geq 0$ M_n est $(Y_0, \dots, Y_n)$-mesurable ["(M_n) est adapté"]
3. $\forall n \geq 0$, $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n] = M_n$

C'est une sous-martingale si $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n] \geq M_n$

——— sur martingale ——— ——— $\leq M_n$

Interprétation martingale = jeu équitable.

M_n : avoir d'un joueur à l'instant n

$Y_0, \dots, Y_n$: information du joueur à cet instant.

(M_n) martingale $\Rightarrow$ $(\mathbb{E}[M_n])$ constant

(M_n) sous martingale $\Rightarrow$ $(\mathbb{E}[M_n])$ croissant

(M_n) sur martingale $\Rightarrow$ $(\mathbb{E}[M_n])$ décroissant

Remarque Pourquoi "sous" martingale avec $\geq$? À cause de l'analyse harmonique :

- Si f est sous-harmonique et $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $(f(B_t))_{t\geq 0}$ est une sous-martingale.
- f sous-harmonique sur D veut dire si u harmonique avec $f = u$ sur ∂D, alors $f \leq u$.

Exemples ① Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ v.a. réelles iid dans L^1. On pose $U_0=0, M_0 = 0$, $M_n = U_1 + \cdots + U_n$ pour $n \geq 1$.

Alors $(M_n)_{n\geq 0}$, pour $(U_i)_{i\geq 0}$, est une

- martingale si $\mathbb{E}[U_1] = 0$
- sous-martingale si $\mathbb{E}[U_1] \geq 0$
- sur-martingale si $\mathbb{E}[U_1] \leq 0$.

En effet, $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid U_0, \ldots, U_n]$

$$= \mathbb{E}[U_1 + \cdots + U_n \mid U_0, \ldots, U_n] + \mathbb{E}[U_{n+1} \mid U_0, \ldots, U_n]$$

$$= U_1 + \cdots + U_n + \mathbb{E}[U_{n+1}]$$

$$= M_n + \mathbb{E}[U_1]$$

② Soit $X \in L^1$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ des v.a. On pose $M_n = \mathbb{E}[X \mid Y_0, \ldots, Y_n]$

Alors $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour $(Y_n)_{n\geq 0}$ appelée <u>martingale de Doob</u> ou <u>martingale fermée</u>

En effet $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_0, \ldots, Y_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M \mid Y_0, \ldots, Y_{n+1}] \mid Y_0, \ldots, Y_n]$

$$= \mathbb{E}[X \mid Y_0, \ldots, Y_n] = M_n$$

2) Opérations sur les martingales

On admet les propriétés suivantes (utilisation des propriétés de l'espérance conditionelle)

Prop Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ adapté à $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ avec $\forall n \geqslant 0$ $\mathbb{E}[|\varphi(M_n)|] < \infty$.

① Si (M_n) est une martingale pour (Y_n), $(\varphi(M_n))$ est une sous martingale

② Si (M_n) est une sous-martingale pour (Y_n) et si φ est croissante, alors $(\varphi(M_n))$ est une sous-martingale.

Corollaire: Si (M_n) est une martingale, alors
- $(|M_n|)$ est une sous martingale
- (M_n^+) ———————— $(X^+ = \max(X, 0))$
- (M_n^2) ———————— lorsque $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ $\forall n \geqslant 1$.

Si (M_n) sous martingale, alors (M_n^+) sous-martingale.

Prop [intégrale stochastique discrète]
Soit (M_n) adapté à (Y_n). Soit $(H_n)_{n\geqslant 1}$ v.a. bornées tq $\forall n \geqslant 1$, H_n est $(Y_0, \dots, Y_{n-1})$-mesurable ("(H_n) prévisible")
On pose
$$\begin{cases} (H\cdot M)_0 = 0 \\ (H\cdot M)_n = H_1(M_1 - M_0) + \dots + H_n(M_n - M_{n-1}) \end{cases}$$
Alors
(M_n) martingale $\Rightarrow$ $(H\cdot M)$ martingale.

Interprétation Si M_n est l'avoir d'un joueur à l'instant n, $M_{n+1} - M_n$ représente le gain entre l'instant n et $n+1$. $H_{n+1}(M_{n+1} - M_n)$ représente le gain si la mise à l'instant n est multipliée par H_{n+1} (qui ne dépend que de l'information jusqu'au temps n). Le jeu reste équitable !

Preuve : • $(H \cdot M)$ est adapté et intégrable

• $$\mathbb{E}[(H \cdot M)_{n+1} - (H \cdot M)_n \mid Y_0, \dots, Y_n] = \mathbb{E}[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid Y_0, \dots, Y_n]$$

$$= H_{n+1}\,\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \mid Y_0, \dots, Y_n]$$

$$\mathbb{E}[(H \cdot M)_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n] - (H \cdot M)_n = H_{n+1}(\mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n] - M_n)$$

$$= 0$$

II) Temps d'arrêt, théorème d'arrêt

1) Définitions

Déf Une v.a. T à valeurs dans $\mathbb{N}$ est un temps d'arrêt pour $(Y_n)_{n\geq 0}$ si $\forall n \geq 0$ $\mathbb{1}_{T=n}$ est $(Y_0, \dots, Y_n)$-mesurable.

(pour simplifier on se restreint à des temps d'arrêts finis)

Exemple Si (M_n) est (Y_n)-adapté et $K \geq 1$ entier.
$T = \inf\{n \geq 0 : M_n \geq 10\} \wedge K$ est un temps d'arrêt.

En effet, pour $n < K$, $\mathbb{1}_{T=n} = \mathbb{1}_{M_0 < 10} \times \dots \times \mathbb{1}_{M_{n-1} < 10} \times \mathbb{1}_{M_n \geq 10}$

et $\mathbb{1}_{T=K} = \mathbb{1}_{M_0 < 10} \times \dots \times \mathbb{1}_{M_{K-1} < 10}$

Remarque Si T temps d'arrêt, $\mathbb{1}_{T \geq n}$ est $(Y_0, \dots, Y_{n-1})$-mesurable. En effet

$$\mathbb{1}_{T \geq n} = 1 - \mathbb{1}_{T \leq n-1} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{T=k}.$$

2) Théorème d'arrêt

Théorème Soit (M_n) une martingale et T temps d'arrêt.
① Le processus arrêté $M^T = (M_{n \wedge T})_{n \geq 0}$ est une martingale, en particulier : $M_{n\wedge T} \in L^1$, $\mathbb{E}[M_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[M_0]$ $\forall n \geq 0$.

② Dans les 3 cas suivants

ⓐ T borné
ⓑ $(M_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ u.i (uniformément intégrable)
ⓒ $\mathbb{E}[T]<\infty$ et $\exists C>0$ tq $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|M_n-M_{n-1}| \mid Y_0,\dots,Y_{n-1}]\leq C$ p.s.

on a $M_T \in L^1$ et $\mathbb{E}[M_T]=\mathbb{E}[M_0]$.

De même avec sous/sur martingale en remplaçant $=$ par $\leq / \geq$

Application (cf exercices)
si $(W_n)_{n\geq 0}$ marche aléatoire simple ± 1 issue de 0, $a,b>0$, trouver la loi de $T=\inf\{n\geq 0 : W_n=b$ ou $W_n=-a\}$ et de W_T.

Preuve de ①: avec $H_n=\mathbb{1}_{T\geq n}$ on remarque que $M_{n\wedge T}=M_0+(H\cdot M)_n$!

⚠ $\mathbb{E}[M_T]=\mathbb{E}[M_0]$ FAUX en général, contre-exemple plus tard.

3) Application: arrêt optimal

Soit $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ un processus adapté à $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$ et intégrable

On s'intéresse à $S_N=\sup_{T\in\mathbb{T}_n} \mathbb{E}[X_T]$ où

$\mathbb{T}_N = \{ \text{temps d'arrêt} \leq N \}$.

$T_* \in \mathbb{T}_n$ est optimal si $\mathbb{E}[X_{T_*}] = S_N$.

Théorème (enveloppe de Snell)

On définit $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ par
$M_N = X_N$ et $M_n = \max(X_n, \mathbb{E}[M_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n])$ pour $0 \leq n \leq N-1$.
Alors
1. (M_n) est la plus petite surmartingale majorant (X_n)
2. $T_* = \min\{ 0 \leq n \leq N : M_n = X_n \} \in \mathbb{T}_N$ et M^{T_*} est une martingale
3. T_* est optimal

Preuve :

1. (M_n) est bien une surmartingale.

Si (Z_n) surmartingale majorant (X_n) :

- $Z_N \geq X_N \geq M_N$
- montrons que $Z_n \geq M_n \Rightarrow Z_{n-1} \geq M_{n-1}$

$Z_{n-1} \geq \mathbb{E}[Z_n | Y_0, \dots, Y_n] \geq \mathbb{E}[M_n | Y_0, \dots, Y_n]$

Or $Z_{n-1} \geq X_{n-1}$.

Donc $Z_{n-1} \geq \max(X_{n-1}, \mathbb{E}[M_n | Y_0, \dots, Y_n]) = M_{n-1}$.

2. T_* est bien un temps d'arrêt.

Pour montrer que M^{T_*} est une martingale on montre que pour $0 \leq n \leq N$ on a

$$\mathbb{E}[M^{T_*}_{n+1} - M^{T_*}_n | Y_0, \dots, Y_n] = 0$$

a) si $T_* \leq n$, $M^{T_*}_{n+1} - M^{T_*}_n = M_{T^* \wedge (n+1)} - M_{T^* \wedge n} = 0$

Donc $\mathbb{E}[(M^{T_*}_{n+1} - M^{T_*}_n) \mathbb{1}_{T_* \leq n} | Y_0, \dots, Y_n] = 0$

Si $T^* \geq n+1$, $M_n > X_n$, donc $M_n = \mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n]$

Donc $(M^{T^*}_{n+1} - M^{T^*}_n) \mathbb{1}_{T^* \geq n+1} = (M_{n+1} - \mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n]) \mathbb{1}_{T^* \geq n+1}$

Donc $\mathbb{E}[(M^{T^*}_{n+1} - M^{T^*}_n) \mathbb{1}_{T^* \geq n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n]$

$= \mathbb{E}[(M_{n+1} - \mathbb{E}[M_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n]) \mid Y_0, \dots, Y_n] \mathbb{1}_{T^* \geq n+1}$

$= 0$ car $\mathbb{1}_{T^* \geq n+1} = 1 - \mathbb{1}_{T^* \leq n}$ est $(Y_0, \dots, Y_n)$ mesurable

3) On a

$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_0^{T^*}] = \mathbb{E}[M_N^{T^*}] = \mathbb{E}[M_{T^* \wedge N}] = \mathbb{E}[M_{T^*}] = \mathbb{E}[X_{T^*}]$

Si $T \in \mathbb{T}_n$, $\mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_0]$.

Donc T^* est optimal

Cf feuille d'exercices pour un exemple de calcul d'enveloppe de Snell.

III Convergence des (sur/sous) martingales.

1) Convergence des sur/sous martingales.

Théorème (convergence de Doob) Une (sur/sous) martingale (M_n) bornée dans L^1 (i.e. $\sup_n \mathbb{E}[|M_n|] < \infty$) converge p.s.

Corollaire Une martingale positive (M_n) converge p.s

En effet $\sup_n \mathbb{E}[|M_n|] = \sup_n \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] < \infty$

⚠ La convergence n'a pas forcément lieu dans L^1 :
Si $(X_i)_{i\geq 1}$ sont iid ± 1 proba $1/2$, $M_n = 1 + X_1 + \cdots + X_n$, $T = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0\}$, on peut vérifier que (M_n) est une martingale, $T < \infty$ p.s (cf feuille d'exercices), la martingale $(M_n^T)_{n\geq 0}$ converge p.s. vers $M_T = 0$ mais pas dans L^1 car $\mathbb{E}[M_0^T] = 0$

2) Convergence dans L^p $(p \geq 1)$ des martingales

Théorème Soit (M_n) une martingale. On a $\Leftrightarrow$ entre

1. (M_n) converge p.s et dans L^1
2. (M_n) est UI
3. $\exists X \in L^1$ tq $M_n = \mathbb{E}[X \mid Y_0, \ldots, Y_n]$.

Théorème Soit (M_n) martingale, $p>1$. On a
(M_n) converge dans L^p $\iff$ (M_n) bornée dans L^p

⚠ faux pour sous-martingale ou surmartingale de signe non constant

3) Exemple : processus de branchement

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$. On considère une population partant d'un individu et où les individus ont tous un nombre iid d'enfants de loi μ.

On note X_n le nombre d'individus à la génération n.

Comportement de X_n quand $n \to \infty$? (avec $\mu(1) \neq 1$).

Soit $R = \sum_{k=0} k\,\mu(k)$

Alors $M_n = \frac{X_n}{R^n}$ est une martingale positive qui converge p.s vers M_∞.

- Si $R \leq 1$ on peut mq la pop s'éteint : $M_\infty = 0$ p.s.
- Si $R > 1$, on a $\mathbb{P}(M_\infty > 0) > 0$ sous l'hypothèse $\sum k^2 \mu(k) < \infty$

En effet on vérifie que (M_n) est bornée dans L^2, donc cv dans L^2, donc cv dans L^1.

Donc $1 = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_\infty]$. Donc $\mathbb{P}(M_\infty > 0) > 0$.

Remarque On peut montrer que (théorème de Kesten-Stigum).
$\mathbb{E}[M_\infty] = 1$ ssi $\sum_{k=1}^{\infty} k \log(k)\, \mu(k) < \infty$, et dans ce cas
$M_\infty > 0 \iff$ la pop ne s'éteint pas
Sans cette condition, $M_\infty = 0$ p.s.

IV Inégalités

1) Inégalité maximale de Doob

Théorème Soit (M_n) une sous-martingale. Alors $\forall a>0, n\geq 0$:
$$a\,\mathbb{P}\big(\max_{0\leq k\leq n} M_k > a\big) \leq \mathbb{E}[M_n^+].$$

Idée de la preuve : considérer le temps d'arrêt $T=\inf\{n\geq 0 : M_n > a\}$

Corollaire Si (M_n) martingale, $\forall a>0, n\geq 0$
$$a\,\mathbb{P}\big(\max_{0\leq k\leq n} |M_k| > a\big) \leq \mathbb{E}[|M_n|]$$

2) Inégalités de concentration

Théorème (Azuma-Hoeffding) Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale pour $(Y_n)_{n\geq 0}$. On suppose que $\forall n\geq 0$, il existe A_n $(Y_0,\dots,Y_{n-1})$ mesurable et une constante $c_n>0$ réelles que
$$A_n \leq M_n - M_{n-1} \leq A_n + c_n$$
Alors $\forall n\geq 1$, $\forall a>0$, $\mathbb{P}(M_n - M_0 \geq a) \leq \exp\left(-\frac{2a^2}{c_1^2+\dots+c_n^2}\right)$

En particulier, si $|M_n - M_{n-1}| \leq c_n$, on a
$$\forall n\geq 1, \forall a>0,\ \mathbb{P}(M_n - M_0 \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2(c_1^2+\dots+c_n^2)}\right)$$

Corollaire (inégalité des différences bornées / McDiarmid)

Soit $f : E_1 \times \dots \times E_n \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose $\exists$ constantes $c_1, \dots, c_n$ telles que $\forall\, 1 \leq i \leq n$, $\forall x_1 \in E_1, \dots, \forall x_n \in E_n$,

$$\sup_{x'_i \in E_i} \left| f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \right| \leq c_i$$

Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes. Alors $\forall a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left| f(X_1, \dots, X_n) - \mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_n)] \right| \geq \varepsilon \right) \leq 2 \exp\left(- \frac{2\varepsilon^2}{c_1^2 + \dots + c_n^2} \right)$$

Idée de preuve : Azuma pour martingale de Doob.

3) Application : nombre chromatique de graphes aléatoires.

$\chi(G) =$ nombre chromatique de G, plus petit entier $k \geq 1$ tel que l'on puisse colorier les sommets avec k couleurs de sorte que deux sommets reliés par une arête aient toujours des couleurs différentes.

$G(n,p)$: graphe d'Erdős-Renyi avec n sommets où chacune des $\binom{n}{2}$ arêtes est présente indépendamment avec probabilité p.

On note $\chi_{n,p} = \chi(G(n,p))$.

Alors $\forall a > 0$: $\mathbb{P}(|\chi_{n,p} - \mathbb{E}[\chi_{n,p}]| \geq a) \leq 2 e^{-\frac{2t^2}{n}}$.

Essai 1 : inégalité des différences bornées avec les $\binom{n}{2}$ v.a. (présence ou non arête) $\to$ n^2 au dénominateur.

Essai 2 : inégalité des différences bornées avec $X_1, X_2, \dots, X_n$ où X_i désigne l'état des arêtes $\{j, i\}$ avec $j < i$.