

Feuille d'exercices

* * *

Exercice 1. On considère une suite $(T_n)_{n \geq 0}$ d'arbres aléatoires construits par attachement préférentiel : T_0 est composé d'un sommet, et pour tout $n \geq 0$, T_{n+1} est construit à partir de T_n en reliant un nouveau sommet à un sommet de T_n choisi au hasard proportionnellement à son degré, indépendamment des autres choix.

On note D_n le degré dans T_n du sommet initialement présent dans T_0 . L'objectif de cet exercice est d'étudier D_n .

- (1) Trouver une suite $(c_n)_{n \geq 1}$ avec $c_1 = 1$ telle que $M_n = D_n/c_n$ soit une martingale.
- (2) Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}(D_n \geq (1+x)c_n) \leq \exp\left(-C \frac{x^2}{\ln n}\right).$$

- (3) (a) La martingale $(M_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle p.s. ?
- (b) La martingale $(M_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle dans L^p pour $p > 1$?
- (c) [Question bonus] Démontrer que la loi limite est $\sqrt{\frac{\pi}{2}}|Z|$ où Z est une gaussienne centrée réduite (en particulier la limite de la martingale est p.s. strictement positive).

* * *

Corrigé :

- (1) On remarque que pour tout $n \geq 0$, T_n est composé de $n+1$ sommets et que la somme des degrés de tous les sommets de T_n vaut $2n$ (2 fois le nombre d'arêtes). On en déduit que $D_1 = 1$ et pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = D_n + 1 | T_0, \dots, T_n) = \frac{D_n}{2n}, \quad \mathbb{P}(D_{n+1} = D_n | T_0, \dots, T_n) = 1 - \frac{D_n}{2n}, \quad (1)$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[D_{n+1} | T_0, \dots, T_n] = (D_n + 1) \frac{D_n}{2n} + D_n \left(1 - \frac{D_n}{2n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) D_n.$$

On en déduit que pour $n \geq 1$, $M_n = \frac{D_n}{c_n}$ est une martingale, où $c_1 = 1$ et pour $n \geq 2$

$$c_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right).$$

(si on voulait définir M_0 on pourrait poser $M_0 = 1$)

- (2) En notant $X_n = \mathbb{I}$ le n -ième sommet s'attache au sommet initial, on calcule pour $n \geq 1$ les incréments :

$$M_{n+1} - M_n = \frac{D_n + X_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{D_n}{c_n} = \frac{1}{c_{n+1}} \left(X_{n+1} - \frac{D_n}{2n} \right),$$

car $c_{n+1} = c_n(1 + \frac{1}{2n})$. Comme $X_{n+1} \in \{0, 1\}$ et $0 \leq D_n/(2n) \leq 1$, on a

$$|M_{n+1} - M_n| \leq \frac{1}{c_{n+1}}.$$

Par l'inégalité d'Azuma–Hoeffding appliquée à la martingale (M_n) , pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(M_n - 1 \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2 \sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1}^{-2}}\right).$$

Comme $D_n = c_n M_n$, on obtient

$$\mathbb{P}(D_n \geq (1+x)c_n) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2 \sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1}^{-2}}\right).$$

Or $c_n \sim C\sqrt{n}$ pour une constante $C > 0$, donc

$$\sum_{k \leq n} c_k^{-2} \sim C \ln(n)$$

pour une certaine constante $C > 0$ et le résultat en découle.

- (3) (a) C'est une martingale positive, donc elle est bornée dans L^1 et donc converge p.s.
 (b) Il suffit de le faire pour $p > 1$ entier grâce à l'inégalité de Hölder. On raisonne par récurrence forte sur p .

En reprenant (1), on voit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_{n+1}^p \mid T_0, \dots, T_n] &= (D_n + 1)^p \frac{D_n}{2n} + D_n^p \left(1 - \frac{D_n}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{p}{2n}\right) D_n^p + \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{p-1} \binom{p}{m-1} D_n^m. \end{aligned}$$

On pose

$$a_n^{(p)} = \frac{\mathbb{E}[D_n^p]}{c_n^p}.$$

En prenant l'espérance et en divisant par $c_{n+1}^p = c_n^p(1 + \frac{1}{2n})^p$, on obtient

$$a_{n+1}^{(p)} = \lambda_{n,p} a_n^{(p)} + \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{p-1} \binom{p}{m-1} \frac{\mathbb{E}[D_n^m]}{c_{n+1}^p} \quad \text{avec } \lambda_{n,p} = \frac{1 + \frac{p}{2n}}{(1 + \frac{1}{2n})^p} \leq 1. \quad (2)$$

Supposons maintenant que

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[M_n^m] < \infty \quad \text{pour tout } m \in \{1, \dots, p-1\}.$$

Alors, pour $1 \leq m \leq p-1$,

$$\frac{\mathbb{E}[D_n^m]}{c_{n+1}^p} = \frac{c_n^m \mathbb{E}[M_n^m]}{c_{n+1}^p} \leq C c_n^{m-p} \mathbb{E}[M_n^m] \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

car $p-m \geq 1$. En reportant dans (2), on obtient donc pour $n \geq 1$

$$a_{n+1}^{(p)} \leq a_n^{(p)} + \frac{C_p}{n^{3/2}} \quad (3)$$

pour une certaine constante $C_p > 0$, ce qui implique par somme télescopique que $(a_n^{(p)})$ est bornée.

- (c) Notons M_∞ la limite de la martingale. On utilise la méthode moments (la loi de $\sqrt{\frac{\pi}{2}}|Z|$ étant bien caractérisée par ses moments).

D'après la question précédente, pour $p \geq 1$,

$$M_n \longrightarrow M_\infty \quad \text{p.s. et dans } L^p, \quad \text{donc} \quad \mathbb{E}[M_\infty^p] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_n^p].$$

L'objectif est de calculer $\mathbb{E}[M_\infty^p]$.

L'idée est de calculer exactement les moments via les factorielles croissantes

$$x^{\bar{p}} = x(x+1) \cdots (x+p-1), \quad p \geq 1.$$

En utilisant (1), on obtient

$$\mathbb{E}[D_{n+1}^{\bar{p}} | \mathcal{F}_n] = \left(1 + \frac{p}{2n}\right) D_n^{\bar{p}}.$$

En prenant l'espérance,

$$\mathbb{E}[D_{n+1}^{\bar{p}}] = \left(1 + \frac{p}{2n}\right) \mathbb{E}[D_n^{\bar{p}}].$$

Par récurrence, on en déduit pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[D_n^{\bar{p}}] = p! \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{p}{2k}\right) = p! \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+p/2}{k} = \frac{p!}{\Gamma(1+p/2)} \frac{\Gamma(n+p/2)}{\Gamma(n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p/2)} n^{p/2}.$$

en utilisant le fait que $\Gamma(n+a)/\Gamma(n+b) \sim n^{a-b}$. Quand $x \rightarrow \infty$, $x^{\bar{p}} = x^p + O(x^{p-1})$. Par conséquent

$$\mathbb{E}[D_n^p] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p/2)} n^{p/2}.$$

Par ailleurs,

$$c_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(3/2)} n^{1/2}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[M_\infty^p] = p! \frac{\Gamma(3/2)^p}{\Gamma(1 + p/2)}.$$

On remarque que pour $p \geq 2$

$$\frac{\mathbb{E}[M_\infty^{p+2}]}{\mathbb{E}[M_\infty^p]} = \frac{\pi}{2}(p+1)$$

et que les moments de $\sqrt{\frac{\pi}{2}}|Z|$ vérifient la même relation de récurrence (et même conditions initiales pour $p = 0, 1$).

□

Exercice 2. Tout d'abord, pour tout $n \geq 1$ on pose $c_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} = \frac{(n-1)2^n}{n(n+1)}$.

On joue au jeu suivant. À chaque tour $n \geq 1$, on lance une pièce équilibrée. Si pile sort, on gagne c_n et on continue au tour suivant. Si face sort, on perd c_n et le jeu s'arrête définitivement. On pose $M_0 = 0$ et pour $n \geq 1$ on note M_n le gain cumulé après le n -ième tour.

- (1) Démontrer que (M_n) est une martingale de Doob / martingale fermée.
- (2) On pose $H_n = (-1)^n$ pour $n \geq 1$. Démontrer que $(H \cdot M)$ n'est pas une martingale de Doob / martingale fermée.

Corrigé :

- (1) Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Posons $Z_n = \sum_{k=1}^n c_k X_k$ et $T = \min\{k \geq 1 : X_k = -1\}$. Alors (Z_n) est une martingale pour (X_n) , T est un temps d'arrêt (p.s.) fini (T suit une loi géométrique) et on remarque que (M_n) est simplement la martingale arrêtée $(Z_{T \wedge n})$.

Pour vérifier qu'elle est de Doob, il y a plusieurs manières de faire :

- on voit que (M_n) converge vers

$$M_T = \sum_{k=1}^{T-1} c_k - c_T = \frac{2^{1+T}}{T(T+1)} - 2$$

et on vérifie que pour tout $n \geq 1$, $M_n = \mathbb{E}[M_T | X_1, \dots, X_n]$.

- On montre que $M_n \rightarrow M_\infty$ dans L^1 en écrivant

$$\mathbb{E}[|M_T - M_n|] = \mathbb{E}[|M_T - M_n| \mathbb{1}_{T > n}] \leq \mathbb{E}[|M_n| \mathbb{1}_{T > n}] + \mathbb{E}[|M_T| \mathbb{1}_{T > n}].$$

Comme pour $T > n$ on a

$$M_n = \sum_{k=1}^n c_k = \frac{2^{n+1}}{n+1} - 2,$$

il vient

$$\mathbb{E}[|M_n| \mathbb{1}_{T>n}] = \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} - 2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par ailleurs, comme

$$M_T = \sum_{k=1}^{T-1} c_k - c_T = \frac{2^{1+T}}{T(T+1)} - 2$$

on vérifie que

$$\mathbb{E} \left[\frac{2^{1+T}}{T(T+1)} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{2^k} < \infty,$$

donc $M_T \in L^1$ et $\mathbb{E}[|M_T| \mathbb{1}_{T>n}] \rightarrow 0$.

(2) On remarque que $(H \cdot M)$ converge vers

$$(H \cdot M)_T = \sum_{k=1}^{T-1} (-1)^k c_k - (-1)^T c_T = (-1)^{T+1} (c_T + c_{T-1} - c_{T-2} + \cdots \pm c_1)$$

Pour montrer que $(H \cdot M)$ n'est pas de Doob, on montre que $(H \cdot M)_T$ n'est pas dans L^1 . Pour $T \geq 3$:

$$|(H \cdot M)_T| \geq c_T + c_{T-1} - \sum_{k=1}^{T-2} c_k = 2 + \frac{T-3}{(T-1)(T+1)} 2^T,$$

qui est d'espérance infinie car

$$\mathbb{E} \left[\frac{T-3}{(T-1)(T+1)} 2^T \mathbb{1}_{T \geq 3} \right] = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k-3}{(k-1)(k+1)} \frac{2^k}{2^k} = \infty.$$

□

1 Exercices additionnels

1.1 Pêche à la martingale

Exercice 3. On construit récursivement une suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ de permutations aléatoires uniformes comme suit : σ_1 est l'unique permutation de $\{1\}$ et pour $n \geq 1$, σ_{n+1} s'obtient à partir de σ_n en insérant $n+1$ dans l'un des $n+1$ “trous” $\square$ dans $\square \sigma_n(1) \square \sigma_n(2) \square \cdots \square \sigma_n(n) \square$ choisi uniformément au hasard, indépendamment des autres choix.

On note R_n le nombre de blocs croissants de σ_n (un bloc croissant de σ_n est une suite $\sigma_n(i), \sigma_n(i+1), \dots, \sigma_n(j)$ avec $\sigma_n(i-1) > \sigma_n(i)$, $\sigma_n(i) < \sigma_n(i+1) < \cdots < \sigma_n(j)$ et $\sigma_n(j) > \sigma_n(j+1)$).

Trouver une martingale faisant intervenir R_n .

Corrigé :

Sachant $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, R_{n+1} ne change pas si et seulement si $n+1$ est inséré à la fin de l'un des R_n blocs croissants, sinon il augmente de 1. Donc

$$\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n | \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{R_n}{n+1}, \quad \mathbb{P}(R_{n+1} = R_n + 1 | \sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1 - \frac{R_n}{n+1},$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[R_{n+1} | \sigma_1, \dots, \sigma_n] = R_n \frac{R_n}{n+1} + (R_n + 1) \left(1 - \frac{R_n}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} R_n + 1.$$

On voit ainsi que $\mathbb{E}[(n+1)R_{n+1} | \sigma_1, \dots, \sigma_n] = nR_n + n+1$, de sorte que R_n est presque une martingale. Il est naturel de chercher M_n sous la forme $M_n = nR_n + b_n$. En écrivant

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | \sigma_1, \dots, \sigma_n] = nR_n + n+1 + b_{n+1} = M_n + (n+1 + b_{n+1} - b_n),$$

on voit que $b_{n+1} = -(n+1) - n - \dots - 2 + b_1$. Ainsi,

$$M_n = nR_n - \frac{n(n+1)}{2} + c$$

est une martingale pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Remarque. Cet exercice provient de la section 1.10.4 du livre Mahmoud, Hosam M. Sorting : A distribution theory. John Wiley & Sons, 2011. □

1.2 Théorèmes d'arrêt

Exercice 4. Un gardien de parking a mélangé N clés pour N voitures. Les N propriétaires de voitures arrivent en même temps. Le gardien donne à chaque propriétaire une clé selon une permutation choisie uniformément au hasard parmi toutes les permutations. Si un propriétaire reçoit la clé de sa voiture, il la prend et part; sinon, il rend la clé au gardien. Le gardien répète alors le processus avec les clés et les propriétaires restants. Cela continue jusqu'à ce que tous les propriétaires reçoivent les clés de leurs voitures.

Soit T le nombre de tours jusqu'à ce que tous les propriétaires reçoivent les clés de leurs voitures. Le but de l'exercice est de calculer $\mathbb{E}[T]$. Pour $i \geq 1$, on note X_i le nombre de propriétaires qui reçoivent leur clé au i -ème tour.

(1) Montrer que

$$M_k = \sum_{j=1}^k \left(X_j - \mathbb{E}[X_j | X_1, \dots, X_{j-1}] \right)$$

définit une martingale (avec la convention $\mathbb{E}[X_j | X_1, \dots, X_{j-1}] = \mathbb{E}[X_1]$ pour $j = 0$).

(2) Calculer $\mathbb{E}[T]$.

Corrigé :

- (1) C'est un résultat général. Pour simplifier les notations pour $k \geq 1$ posons $D_k = X_k - \mathbb{E}[X_k | X_1, \dots, X_{k-1}]$ de sorte que

$$M_k = \sum_{i=1}^k D_i.$$

Alors D_k est $(X_1, \dots, X_k)$ mesurable et intégrable (car $0 \leq X_k \leq N$), tout comme M_k . Par ailleurs, en utilisant la propriété d'emboîtement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_{k+1} | X_1, \dots, X_k] &= \mathbb{E}[X_{k+1} | X_1, \dots, X_k] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{k+1} | X_1, \dots, X_k] | X_1, \dots, X_k] \\ &= \mathbb{E}[X_{k+1} | X_1, \dots, X_k] - \mathbb{E}[X_{k+1} | X_1, \dots, X_k] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[M_{k+1} | X_1, \dots, X_k] = \mathbb{E}[M_k | X_1, \dots, X_k] + \mathbb{E}[D_{k+1} | X_1, \dots, X_k] = M_k + 0 = M_k,$$

donc (M_k) est une martingale pour (X_k) .

- (2) On a

$$T = \inf\{k \geq 1 : X_1 + \dots + X_k = N\},$$

donc T est un temps d'arrêt pour (X_k) .

Ensuite, si $T > k$, en notant $m = N - (X_1 + \dots + X_k)$ le nombre de propriétaires qui n'ont pas encore leur clé après le k -ième tour, $\mathbb{E}[X_{k+1} | X_1, \dots, X_k]$ est le nombre moyen de points fixes d'une permutation uniforme de longueur m , qui vaut 1. Ainsi, pour $k \leq T$ on a

$$M_k = \left(\sum_{j=1}^k X_j \right) - k.$$

En particulier

$$M_T = N - T.$$

Si on peut utiliser le théorème d'arrêt, on a alors $N - \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0] = 0$, et donc $\mathbb{E}[T] = N$.

On vérifie que les hypothèses du 3ème théorème d'arrêt sont vérifiées :

- Les incréments de la martingales (M_k) sont bornés par $N + 1$.
- pour vérifier que $\mathbb{E}[T] < \infty$, on remarque qu'on peut écrire $T \leq G_N + \dots + G_1$ où $(G_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont des variables aléatoires, de loi géométrique avec G_i de paramètre de succès la probabilité qu'une permutation uniforme de longueur i ait au moins 1 point fixe (probabilité qui est > 0). Ainsi $\mathbb{E}[T] < \infty$.

□

Exercice 5. [Problème du parking via enveloppe de Snell] Vous conduisez une voiture sur une voie

infinie à la recherche d'une place de stationnement. Bien sûr, les places ne sont pas toutes libres. Votre objectif est de vous garer le plus proche possible du CIRM, sachant que vous ne pouvez pas revenir en arrière. Vous voyez une place libre à distance n du CIRM. Faut-il s'y garer ?

On modélise ce problème comme suit.

- Vous démarrez à l'origine. Des emplacements de stationnement sont disponibles à tous les entiers. Soient $(V_n)_{n \geq 0}$ des variables aléatoires i.i.d de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, avec $V_n = 1$ si une voiture est garée à l'emplacement n (emplacement occupé). Le CIRM se trouve au point entier $N > 0$.
- Si l'emplacement $n \in [0, N]$ est disponible (i.e. si $V_n = 0$) et que vous décidez de vous y garer, vous subissez le coût $X_n = n - N$ correspondant à l'effort de faire la distance restante en marchant. Si $V_n = 1$, $X_n = -\infty$.
- Enfin, si vous arrivez en N , votre objectif, sans vous être garé, vous prenez la première place de stationnement libre qui se présente. Ainsi, si l'emplacement N est occupé, le coût moyen que vous subissez est alors

$$X_N = -C \mathbb{1}_{V_N=1}, \quad \text{avec } C = \sum_{j \geq 1} j p^{j-1} (1-p) = \frac{1}{1-p}.$$

L'objectif est de trouver le temps d'arrêt $T \in \{0, 1, \dots, N\}$ qui maximise $\mathbb{E}[X_T]$ (ce qui revient à minimiser la distance de marche moyenne).

- (1) Démontrer que la stratégie d'arrêt optimal est nécessairement de la forme

$$T^* = \inf\{n \geq N - r^* : V_n = 0\}$$

où r^* est une quantité à déterminer.

- (2) Démontrer que

$$r^* = \inf\{r \geq 0 : -1 + 2p^{r+1} \leq 0\}.$$

Corrigé :

- (1) L'enveloppe de Snell est donnée par $M_N = X_N$ et

$$M_n = \max\{X_n, \mathbb{E}[M_{n+1} | V_0, \dots, V_n]\} \quad \text{pour } n < N.$$

Un simple raisonnement par récurrence rétrograde, utilisant l'indépendance des V_n , montre que M_n est une fonction de V_n . Par conséquent

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | V_0, \dots, V_n] = \mathbb{E}[M_{n+1}]$$

est une quantité qui dépend de n , notons là $f(n+1)$ pour une certaine fonction $f : \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi

$$M_n = \max\{(n - N) \mathbb{1}_{V_n=0} - \infty \mathbb{1}_{V_n=1}, f(n+1)\} \quad \text{pour } n < N.$$

Comme M est une surmartingale, l'espérance $n \rightarrow \mathbb{E}[M_n]$ décroît et par conséquent $n \rightarrow f(n)$ est

décroissante. Le premier temps où $M_n = X_n$ revient donc à déterminer le premier $n < N$ tel que

$$V_n = 0 \quad \text{et} \quad n - N \geq f(n + 1). \quad (4)$$

Soit $r^* \geq 0$ le premier point tel que $r^* - N \geq f(r^* + 1)$. Si une place est disponible avant r^* alors l'inégalité de la relation (4) ne sera pas satisfaite, par conséquent il suffit de choisir la première place disponible après r^* .

La stratégie d'arrêt optimale est nécessairement de la forme

$$T^* = \inf\{n \geq N - r^*; \quad V_n = 0\} \quad (13.5)$$

où r^* est une constante à déterminer.

(2) On note $\ell(r)$ le coût espéré en utilisant une stratégie de seuil avec paramètre r , i.e.

$$\ell(r) = \mathbb{E}[M_{T(r)}] \quad \text{où} \quad T(r) = \inf\{n \geq N - r; \quad V_n = 0\}.$$

Nous allons calculer $\ell(r)$ et optimiser en fonction de r pour identifier r^* .

Pour $r = 0$, on obtient

$$\ell(0) = -(1 - p) \times 0 - pC = -\frac{p}{1 - p}.$$

Pour $r \geq 1$, on calcule par récurrence $\ell(r) = -(1 - p)r + p\ell(r - 1)$. On déduit alors que

$$-\ell(r) = r + 1 + \frac{2p^{r+1} - 1}{1 - p}, \quad r \leq N.$$

Pour maximiser $\ell(r)$, on remarque que la fonction $r \mapsto \ell(r + 1) - \ell(r) = -1 + 2p^{r+1}$ est décroissante en r . Par conséquent

$$r^* = \inf\{r \geq 0; \quad -1 + 2p^{r+1} \leq 0\}.$$

À titre d'exemple, on peut voir que pour $p \leq 0.5$, il faut chercher à se garer en arrivant à destination et que pour $p = 0.9$, il faut chercher la première place disponible dès qu'on arrive à 6 places de la destination. $\square$

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour $n \geq 1$, qui est une martingale pour $(X_i)_{i \geq 0}$. On considère des entiers x et $a < 0 < b$, et on définit les temps d'arrêt

$$T_x = \inf\{n \geq 0 : S_n = x\}, \quad T_{a,b} = \min(T_a, T_b), \quad \text{avec la convention usuelle } \inf \emptyset = +\infty,$$

(1) Montrer que $T_{a,b} < \infty$ p.s.

(2) Montrer que $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b}{b - a}$.

(3) Montrer que $T_x < \infty$ p.s.

(4) Montrer que $\mathbb{E}[T_{a,b}] = |ab|$.

On pourra considérer $Q_n = S_n^2 - n$.

(5) Montrer que pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{E}[e^{-uT_b}] = \exp(-\operatorname{arcosh}(e^u)b), \quad \text{où } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

On pourra considérer $M_n = e^{\lambda S_n} / (\cosh \lambda)^n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque. Comme $T_{-1} < \infty$ p.s., on a $S_{n \wedge T_{-1}} \rightarrow S_{T_{-1}} = -1$, mais $0 = \mathbb{E}[S_{n \wedge T_{-1}}] \not\rightarrow -1$. Ainsi la martingale arrêtée $S^{T_{-1}}$ converge p.s. mais pas dans L^1 . La raison est que la suite $(S_{n \wedge T_{-1}})_{n \geq 0}$ n'est pas uniformément intégrable (le « pic » vient du fait que S_n peut prendre des valeurs très grandes lorsque $n < T_{-1}$.)

* * *

Corrigé :

(1) Clairement, si (S_n) effectue $|a| + b$ pas “+1” consécutifs, alors $T_{a,b} < \infty$. Il suffit donc de vérifier que p.s. (S_n) effectue $|a| + b$ pas “+1” d'affilée.

Posons $k = |a| + b$ et définissons des variables aléatoires $(G_i)_{i \geq 1}$ en considérant des blocs :

$$G_i = 1 \text{ si } X_{(i-1)k+1} = X_{(i-1)k+2} = \dots = X_{ik} = +1, \quad G_i = 0 \text{ sinon.}$$

Alors les variables $(G_i)_{i \geq 1}$ sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre 2^{-k} , et presque sûrement il y en a au moins une qui vaut 1. En effet :

$$\mathbb{P}(G_i = 0 \text{ pour tout } i \geq 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G_i = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2^{-k})^n = 0.$$

Cela montre que $T_{a,b} < \infty$ p.s.

(2) Le temps aléatoire $T_{a,b}$ est un temps d'arrêt fini. Comme $|S_{n \wedge T_{a,b}}| \leq \max\{|a|, b\} \leq |a| + b$, la martingale arrêtée $(S_{n \wedge T_{a,b}})_{n \geq 0}$ est bornée, donc uniformément intégrable, et par conséquent

$$\mathbb{E}[S_{T_{a,b}}] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$

Or $S_{T_{a,b}} \in \{a, b\}$, donc

$$0 = \mathbb{E}[S_{T_{a,b}}] = a \mathbb{P}(T_a < T_b) + b \mathbb{P}(T_b < T_a).$$

En posant $p = \mathbb{P}(T_a < T_b)$ et en utilisant $\mathbb{P}(T_b < T_a) = 1 - p$, on obtient

$$0 = ap + b(1 - p) \implies p = \frac{b}{b - a},$$

d'où le résultat.

(3) Observons que $T_b \geq b$, donc $T_b \rightarrow \infty$ lorsque $b \rightarrow \infty$. De plus, l'événement $\{T_a < T_b\}$ est croissant en b , donc

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_a < \infty).$$

D'après (2),

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b}{b - a} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 1,$$

donc $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$. Par symétrie, $T_{-a} < \infty$ p.s., et ainsi $T_x < \infty$ p.s. pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

(4) On vérifie que (Q_n) est une martingale (« martingale quadratique »). En effet, $Q_n \in L^1$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1) \mid X_1, \dots, X_n] \\ &= \mathbb{E}[S_n^2 + 2S_n X_{n+1} + X_{n+1}^2 \mid X_1, \dots, X_n] - (n+1) \\ &= S_n^2 + 2S_n \mathbb{E}[X_{n+1}] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2] - (n+1) \\ &= S_n^2 - n = Q_n,\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$ et $\mathbb{E}[X_{n+1}^2] = 1$.

Alors $(Q_{n \wedge T_{a,b}})_{n \geq 0}$ est une martingale. Il n'est pas immédiat de voir qu'elle est uniformément intégrable; on raisonne donc directement pour montrer que $\mathbb{E}[T_{a,b}] < \infty$ pour utiliser le théorème d'arrêt. De $\mathbb{E}[Q_{n \wedge T_{a,b}}] = \mathbb{E}[Q_0] = 0$ on déduit

$$\mathbb{E}[S_{T_{a,b} \wedge n}^2] = \mathbb{E}[T_{a,b} \wedge n].$$

Par convergence dominée,

$$S_{T_{a,b} \wedge n}^2 \rightarrow S_{T_{a,b}}^2, \quad 0 \leq S_{T_{a,b} \wedge n}^2 \leq a^2 + b^2,$$

d'où $\mathbb{E}[S_{T_{a,b} \wedge n}^2] \rightarrow \mathbb{E}[S_{T_{a,b}}^2]$. Par convergence monotone, $\mathbb{E}[T_{a,b} \wedge n] \rightarrow \mathbb{E}[T_{a,b}]$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[T_{a,b}] = \mathbb{E}[S_{T_{a,b}}^2] = a^2 \mathbb{P}(T_a < T_b) + b^2 \mathbb{P}(T_b < T_a).$$

En utilisant (2) et $\mathbb{P}(T_b < T_a) = 1 - \mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{-a}{b-a}$, on obtient

$$\mathbb{E}[T_{a,b}] = a^2 \frac{b}{b-a} + b^2 \frac{-a}{b-a} = \frac{ab(a-b)}{b-a} = -ab = |ab|.$$

(5) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons

$$M_n = \frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh \lambda)^n}, \quad \cosh \lambda = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}.$$

C'est une martingale (« martingale exponentielle »). En effet, $M_n \in L^1$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n] &= \frac{1}{(\cosh \lambda)^{n+1}} \mathbb{E}[e^{\lambda(S_n + X_{n+1})} \mid X_1, \dots, X_n] \\ &= \frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh \lambda)^{n+1}} \mathbb{E}[e^{\lambda X_{n+1}}] = \frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh \lambda)^n} = M_n,\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E}[e^{\lambda X_{n+1}}] = \frac{1}{2}(e^\lambda + e^{-\lambda}) = \cosh \lambda$.

Fixons $\lambda > 0$. Alors $(M_{n \wedge T_b})_{n \geq 0}$ est une martingale et elle est uniformément intégrable car elle est bornée : en effet, $S_{n \wedge T_b} \leq b$ donc

$$0 \leq M_{n \wedge T_b} \leq e^{\lambda b}.$$

Par conséquent, d'après le théorème d'arrêt $\mathbb{E}[M_{T_b}] = \mathbb{E}[M_0] = 1$, c'est-à-dire

$$1 = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda b}}{(\cosh \lambda)^{T_b}}\right], \quad \text{donc} \quad \mathbb{E}[(\cosh \lambda)^{-T_b}] = e^{-\lambda b}.$$

Soit $u > 0$ et choisissons $\lambda > 0$ tel que $\cosh \lambda = e^u$, c'est-à-dire $\lambda = \operatorname{arcosh}(e^u)$. Alors $(\cosh \lambda)^{-T_b} = e^{-uT_b}$ et

$$\mathbb{E}[e^{-uT_b}] = e^{-\lambda b} = \exp(-\operatorname{arcosh}(e^u) b),$$

ce qui donne la formule annoncée. □

1.3 Inégalités

Exercice 7. Le problème du *bin packing* est un problème fondamental de la recherche opérationnelle. Étant donné n objets de tailles $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$, et une collection illimitée de bacs de taille 1, quel est le nombre minimum de bacs requis pour ranger les objets ?

On étudie ici une version aléatoire de ce problème : on suppose que les objets ont des tailles aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots$ sur $[0, 1]$ suivant une même loi. Soit B_n le nombre (aléatoire) de bacs requis pour ranger $X_1, X_2, \dots, X_n$ de manière optimale.

- (1) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et $x \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}[|B_n - \mathbb{E}[B_n]| \geq x] \leq 2 \exp\left(-\frac{2x^2}{n}\right).$$

- (2) Démontrer que $\mathbb{E}[B_n]/n$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une limite notée β .

- (3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\beta \in]0, 1[$.

Corrigé :

- (1) Pour $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, notons $B(x_1, \dots, x_n)$ le nombre minimal de bacs de capacité 1 nécessaires pour ranger les objets de tailles $x_1, \dots, x_n$. En modifiant l'une des variables, la variation de B est au plus un. D'après l'inégalité des différences bornées, pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|B_n - \mathbb{E}[B_n]| \geq x) \leq 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2 \sum_{k=1}^n 1^2}\right) = 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right).$$

- (2) L'idée est d'utiliser un argument de sous-additivité. Pour $m, n \geq 1$, on a presque sûrement

$$B_{m+n} \leq B_m + B'_n, \tag{5}$$

où B'_n désigne le nombre minimal de bacs nécessaires pour ranger les n objets $X_{m+1}, \dots, X_{m+n}$. En effet, en rangeant d'un côté les m premiers objets de manière optimale (dans B_m bacs) et de l'autre les n suivants (dans B'_n bacs), on obtient un rangement des $m+n$ objets utilisant $B_m + B'_n$ bacs. L'optimalité de B_{m+n} donne (5). En prenant l'espérance, comme les tailles des objets sont i.i.d., on a

$$\mathbb{E}[B_{m+n}] \leq \mathbb{E}[B_m] + \mathbb{E}[B_n], \quad m, n \geq 1.$$

Ainsi, la suite $a_n = \mathbb{E}[B_n]$ est sous-additive. Par le lemme de sous-additif (parfois connu sous

le nom de Lemme de Fekete), la limite

$$\beta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[B_n]}{n}$$

existe et vérifie

$$\beta = \inf_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[B_n]}{n}.$$

- (3) Tout d'abord, on a toujours $B_n \leq n$ donc $\mathbb{E}[B_n]/n \leq 1$, d'où $\beta \leq 1$. De plus, si $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est la somme des tailles, alors dans tout rangement, la somme des capacités des bacs utilisés vaut B_n et doit être au moins S_n , donc $B_n \geq S_n$. En particulier,

$$\frac{\mathbb{E}[B_n]}{n} \geq \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} = \mathbb{E}[X_1].$$

En passant à la limite, on obtient

$$\beta \geq \mathbb{E}[X_1]. \quad (6)$$

Caractérisation de $\beta > 0$. On a $\beta > 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$. En effet, si $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1$, alors tous les objets ont taille 0 et $B_n = 0$ pour tout n , donc $\beta = 0$. Réciproquement, si $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$, alors $\mathbb{E}[X_1] > 0$ et (6) donne $\beta \geq \mathbb{E}[X_1] > 0$.

Caractérisation de $\beta < 1$ On montre que

$$\beta = 1 \iff \mathbb{P}(X_1 > 1/2) = 1.$$

Sens $\Leftarrow$. Si $\mathbb{P}(X_1 > 1/2) = 1$, alors presque sûrement aucun bac ne peut contenir deux objets, donc $B_n = n$ p.s., d'où $\mathbb{E}[B_n]/n = 1$ et $\beta = 1$.

Sens $\Rightarrow$. On montre la contraposée. Supposons $p := \mathbb{P}(X_1 \leq 1/2) > 0$. Posons

$$N_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq 1/2\}}.$$

Considérons le rangement (non nécessairement optimal) suivant : on met les objets de taille $\leq 1/2$ deux par deux dans des bacs (sauf éventuellement dans un bloc), et on place tous les autres objets (de taille $> 1/2$) chacun dans son propre bac. Ce rangement utilise au plus

$$(n - N_n) + \left\lceil \frac{N_n}{2} \right\rceil = n - \left\lfloor \frac{N_n}{2} \right\rfloor$$

bacs. Par optimalité,

$$B_n \leq n - \left\lfloor \frac{N_n}{2} \right\rfloor.$$

En prenant l'espérance et en utilisant $\lfloor u \rfloor \geq u - 1$, on obtient

$$\mathbb{E}[B_n] \leq n - \frac{\mathbb{E}[N_n]}{2} + 1 = n - \frac{np}{2} + 1.$$

Ainsi

$$\frac{\mathbb{E}[B_n]}{n} \leq 1 - \frac{p}{2} + \frac{1}{n},$$

et en passant à la limite, $\beta \leq 1 - \frac{p}{2} < 1$.

Conclusion. On a

$$\beta \in (0, 1) \iff \mathbb{P}(X_1 = 0) < 1 \text{ et } \mathbb{P}\left(X_1 \leq \frac{1}{2}\right) > 0$$

□

1.4 Manipulations des martingales

Exercice 8. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale pour $(Y_n)_{n \geq 0}$. Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale pour elle-même.

Corrigé :

On vérifie les trois conditions de la définition. Soit $n \geq 0$.

- (1) M_n est bien intégrable car c'est une martingale pour $(Y_n)_{n \geq 0}$;
- (2) M_n est bien $(M_0, \dots, M_n)$ mesurable ;
- (3) Comme $(M_0, \dots, M_n)$ est $(Y_0, \dots, Y_n)$ mesurable, on écrit, en utilisant la propriété d'emboîtement :

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | M_0, \dots, M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n] | M_0, \dots, M_n] = \mathbb{E}[M_n | M_0, \dots, M_n] = M_n$$

en utilisant la propriété de sortie pour la dernière égalité.

□

Exercice 9. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale bornée supérieurement (c'est-à-dire que $M_n \leq C$ pour tout $n \geq 0$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante déterministe). Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans L^1 .

Corrigé :

Avec la notation $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$, en utilisant le fait que $|x| = x^+ + x^-$ et $x = x^+ - x^-$, on a

$$\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}[M_n^+] + \mathbb{E}[M_n^-] = 2\mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_n] \leq 2C^+ - \mathbb{E}[M_0],$$

où on a utilisé les deux inégalités $M_n^+ \leq C^+$ (conséquence de l'hypothèse) et $\mathbb{E}[M_n] \geq \mathbb{E}[M_0]$ ((M_n)

sous-martingale).

□

Exercice 10. Trouver une suite $(M_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires intégrables telle que $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n$ mais telle que $(M_n)_{n \geq 0}$ ne soit pas une martingale pour elle-même.

Corrigé :

Prenons une marche aléatoire simple, c'est-à-dire $M_n = X_1 + \dots + X_n$ avec $(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$, mais légèrement modifiée de sorte que lorsqu'elle atteint 0, elle répète l'étape X_1 . En effet, pour $n \geq 1$, nous avons

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | M_0, \dots, M_n] = \begin{cases} M_n & \text{si } M_n \neq 0 \\ -1 & \text{si } M_n = 0 \text{ et } M_1 = -1 \\ 1 & \text{si } M_n = 0 \text{ et } M_1 = 1. \end{cases}$$

En particulier, $\mathbb{E}[M_{n+1} | M_0, \dots, M_n] \neq M_n$ si $M_n = 0$. Il n'est pas trop difficile de voir que presque sûrement, il existe $n \geq 1$ tel que $M_n = 0$. Ainsi, (M_n) n'est pas une martingale. □

2 Pour finir

Exercice 11. Une mathématicienne, une économiste et une trader discutent dans le bar clandestin Au BonBec. L'économiste dit : « La valeur en euros d'une livre sterling au cours du temps est une martingale ! Sinon, il serait possible de gagner de l'argent en moyenne en achetant et en vendant des livres sterling au bon moment ! »

La mathématicienne réplique : « Mais si c'est vrai, puisque la fonction inverse est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, la valeur en livres sterling d'un euro est une sous-martingale ! »

La trader ne dit rien, réfléchit quelques secondes, puis s'en va acheter des euros.

Qu'en pensez-vous ?

Corrigé :

Pour commencer, la mathématicienne a bien sûr raison d'après ce qu'on a vu en cours. De plus, si M_{n+1} n'est pas $M_0, \dots, M_n$ -mesurable (ce qui doit être le cas en pratique), alors l'inégalité est stricte. Enfin, si M_n est la valeur en euros d'une livre sterling, alors M_n^{-1} est la valeur en livres sterling d'un euro, de sorte que le taux euro/livre sterling serait une sous-martingale stricte.

Le raisonnement de la trader est le suivant. Si le taux euro/livre sterling est une sous-martingale stricte, alors en achetant des euros aujourd'hui et en les revendant demain, le gain espéré en livres sterling est strictement positif. Il faut donc le faire ! D'un autre côté, ce raisonnement paraît bizarre : il suggère qu'il serait systématiquement intéressant d'acheter des euros et de les revendre le lendemain, alors que le même raisonnement conduirait à l'inverse si l'on échangeait les rôles de l'euro et de la livre sterling. Cela signifie que l'affirmation de l'économiste doit être fausse : les taux euro/livre sterling et livre sterling/euro seraient tous deux des sous-martingales ! Cela voudrait dire qu'acheter

des euros un jour et les revendre le lendemain donnerait une espérance positive de gain en livres sterling. On a donc, une fois encore, l'impression qu'on peut gagner à tous les coups!

On peut expliquer ce « paradoxe » comme suit. On gagne des livres sterling lorsque le taux de la livre sterling baisse : ainsi, si l'on gagne des livres sterling, alors chacune de ces livres sterling vaut moins qu'au départ. On a donc un gain positif en livres sterling, mais une fois les livres sterling converties en biens, l'espérance de gain devrait redevenir nulle. $\square$