

Feuille d'exercices

Exercice 1. On considère une suite $(T_n)_{n \geq 0}$ d'arbres aléatoires construits par attachement préférentiel : T_0 est composé d'un sommet, et pour tout $n \geq 0$, T_{n+1} est construit à partir de T_n en reliant un nouveau sommet à un sommet de T_n choisi au hasard proportionnellement à son degré, indépendamment des autres choix.

On note D_n le degré dans T_n du sommet initialement présent dans T_0 . L'objectif de cet exercice est d'étudier D_n .

- (1) Trouver une suite $(c_n)_{n \geq 1}$ avec $c_1 = 1$ telle que $M_n = D_n/c_n$ soit une martingale.
- (2) Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}(D_n \geq (1+x)c_n) \leq \exp\left(-C \frac{x^2}{\ln n}\right).$$

- (3) (a) La martingale $(M_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle p.s. ?
- (b) La martingale $(M_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle dans L^p pour $p > 1$?
- (c) [Question bonus] Démontrer que la loi limite est $\sqrt{\frac{\pi}{2}}|Z|$ où Z est une gaussienne centrée réduite (en particulier la limite de la martingale est p.s. strictement positive).

Exercice 2. Tout d'abord, pour tout $n \geq 1$ on pose $c_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} = \frac{(n-1)2^n}{n(n+1)}$.

On joue au jeu suivant. À chaque tour $n \geq 1$, on lance une pièce équilibrée. Si pile sort, on gagne c_n et on continue au tour suivant. Si face sort, on perd c_n et le jeu s'arrête définitivement. On pose $M_0 = 0$ et pour $n \geq 1$ on note M_n le gain cumulé après le n -ième tour.

- (1) Démontrer que (M_n) est une martingale de Doob / martingale fermée.
- (2) On pose $H_n = (-1)^n$ pour $n \geq 1$. Démontrer que $(H \cdot M)$ n'est pas une martingale de Doob / martingale fermée.

1 Exercices additionnels

1.1 Pêche à la martingale

Exercice 3. On construit récursivement une suite $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ de permutations aléatoires uniformes comme suit : σ_1 est l'unique permutation de $\{1\}$ et pour $n \geq 1$, σ_{n+1} s'obtient à partir de σ_n en insérant $n+1$ dans l'un des $n+1$ "trous" $\square$ dans $\square \sigma_n(1) \square \sigma_n(2) \square \cdots \square \sigma_n(n) \square$ choisi uniformément au hasard, indépendamment des autres choix.

On note R_n le nombre de blocs croissants de σ_n (un bloc croissant de σ_n est une suite $\sigma_n(i), \sigma_n(i+1), \dots, \sigma_n(j)$ avec $\sigma_n(i-1) > \sigma_n(i)$, $\sigma_n(i) < \sigma_n(i+1) < \cdots < \sigma_n(j)$ et $\sigma_n(j) > \sigma_n(j+1)$).

Trouver une martingale faisant intervenir R_n .

1.2 Théorèmes d'arrêt

Exercice 4. Un gardien de parking a mélangé N clés pour N voitures. Les N propriétaires de voitures arrivent en même temps. Le gardien donne à chaque propriétaire une clé selon une permutation choisie uniformément au hasard parmi toutes les permutations. Si un propriétaire reçoit la clé de sa voiture, il la prend et part ; sinon, il rend la clé au gardien. Le gardien répète alors le processus avec les clés et les propriétaires restants. Cela continue jusqu'à ce que tous les propriétaires reçoivent les clés de leurs voitures.

Soit T le nombre de tours jusqu'à ce que tous les propriétaires reçoivent les clés de leurs voitures. Le but de l'exercice est de calculer $\mathbb{E}[T]$. Pour $i \geq 1$, on note X_i le nombre de propriétaires qui reçoivent leur clé au i -ème tour.

(1) Montrer que

$$M_k = \sum_{j=1}^k \left(X_j - \mathbb{E}[X_j \mid X_1, \dots, X_{j-1}] \right)$$

définit une martingale (avec la convention $\mathbb{E}[X_j \mid X_1, \dots, X_{j-1}] = \mathbb{E}[X_1]$ pour $j = 0$).

(2) Calculer $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 5. [Problème du parking via enveloppe de Snell] Vous conduisez une voiture sur une voie infinie à la recherche d'une place de stationnement. Bien sûr, les places ne sont pas toutes libres. Votre objectif est de vous garer le plus proche possible du CIRM, sachant que vous ne pouvez pas revenir en arrière. Vous voyez une place libre à distance n du CIRM. Faut-il s'y garer ?

On modélise ce problème comme suit.

- Vous démarrez à l'origine. Des emplacements de stationnement sont disponibles à tous les entiers. Soient $(V_n)_{n \geq 0}$ des variables aléatoires i.i.d de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, avec $V_n = 1$ si une voiture est garée à l'emplacement n (emplacement occupé). Le CIRM se trouve au point entier $N > 0$.
- Si l'emplacement $n \in [0, N]$ est disponible (i.e. si $V_n = 0$) et que vous décidez de vous y garer, vous subissez le coût $X_n = n - N$ correspondant à l'effort de faire la distance restante en marchant. Si $V_n = 1$, $X_n = -\infty$.
- Enfin, si vous arrivez en N , votre objectif, sans vous être garé, vous prenez la première place de stationnement libre qui se présente. Ainsi, si l'emplacement N est occupé, le coût moyen que vous subissez est alors

$$X_N = -C \mathbb{1}_{V_N=1}, \quad \text{avec } C = \sum_{j \geq 1} j p^{j-1} (1-p) = \frac{1}{1-p}.$$

L'objectif est de trouver le temps d'arrêt $T \in \{0, 1, \dots, N\}$ qui maximise $\mathbb{E}[X_T]$ (ce qui revient à minimiser la distance de marche moyenne).

(1) Démontrer que la stratégie d'arrêt optimal est nécessairement de la forme

$$T^* = \inf\{n \geq N - r^* : V_n = 0\}$$

où r^* est une quantité à déterminer.

(2) Démontrer que

$$r^* = \inf\{r \geq 0 : -1 + 2p^{r+1} \leq 0\}.$$

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour $n \geq 1$, qui est une martingale pour $(X_i)_{i \geq 0}$. On considère des entiers x et $a < 0 < b$, et on définit les temps d'arrêt

$$T_x = \inf\{n \geq 0 : S_n = x\}, \quad T_{a,b} = \min(T_a, T_b), \quad \text{avec la convention usuelle } \inf \emptyset = +\infty,$$

(1) Montrer que $T_{a,b} < \infty$ p.s.

(2) Montrer que $\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a}$.

(3) Montrer que $T_x < \infty$ p.s.

(4) Montrer que $\mathbb{E}[T_{a,b}] = |ab|$.

On pourra considérer $Q_n = S_n^2 - n$.

(5) Montrer que pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{E}[e^{-uT_b}] = \exp(-\operatorname{arccosh}(e^u)b), \quad \text{où } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

On pourra considérer $M_n = e^{\lambda S_n} / (\cosh \lambda)^n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque. Comme $T_{-1} < \infty$ p.s., on a $S_{n \wedge T_{-1}} \rightarrow S_{T_{-1}} = -1$, mais $0 = \mathbb{E}[S_{n \wedge T_{-1}}] \not\rightarrow -1$. Ainsi la martingale arrêtée $S^{T_{-1}}$ converge p.s. mais pas dans L^1 . La raison est que la suite $(S_{n \wedge T_{-1}})_{n \geq 0}$ n'est pas uniformément intégrable (le « pic » vient du fait que S_n peut prendre des valeurs très grandes lorsque $n < T_{-1}$.)

1.3 Inégalités

Exercice 7. Le problème du *bin packing* est un problème fondamental de la recherche opérationnelle. Étant donné n objets de tailles $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$, et une collection illimitée de bacs de taille 1, quel est le nombre minimum de bacs requis pour ranger les objets ?

On étudie ici une version aléatoire de ce problème : on suppose que les objets ont des tailles aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots$ sur $[0, 1]$ suivant une même loi. Soit B_n le nombre (aléatoire) de bacs requis pour ranger $X_1, X_2, \dots, X_n$ de manière optimale.

(1) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et $x \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}[|B_n - \mathbb{E}[B_n]| \geq x] \leq 2 \exp\left(-\frac{2x^2}{n}\right).$$

(2) Démontrer que $\mathbb{E}[B_n]/n$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une limite notée β .

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\beta \in]0, 1[$.

1.4 Manipulations des martingales

Exercice 8. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale pour $(Y_n)_{n \geq 0}$. Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale pour elle-même.

Exercice 9. Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale bornée supérieurement (c'est-à-dire que $M_n \leq C$ pour tout $n \geq 0$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante déterministe). Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans L^1 .

Exercice 10. Trouver une suite $(M_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires intégrables telle que $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n$ mais telle que $(M_n)_{n \geq 0}$ ne soit pas une martingale pour elle-même.

2 Pour finir

Exercice 11. Une mathématicienne, un économiste et un trader discutent dans le bar clandestin Au BonBec. L'économiste dit : « La valeur en euros d'une livre sterling au cours du temps est une martingale ! Sinon, il serait possible de gagner de l'argent en moyenne en achetant et en vendant des livres sterling au bon moment ! »

La mathématicienne réplique : « Mais si c'est vrai, puisque la fonction inverse est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, la valeur en livres sterling d'un euro est une sous-martingale ! »

Le trader ne dit rien, réfléchit quelques secondes, puis s'en va acheter des euros.

Qu'en pensez-vous ?
