

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Cadre. Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- X est une variable aléatoire à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, dans L^1
- Y variable aléatoire à valeurs dans F dénombrable.

On pose $F_Y := \{y \in F : \mathbb{P}(Y = y) > 0\}$.

Définition.

On note $\mathbb{E}[X | Y]$ la variable aléatoire $\phi(Y)$ où la fonction ϕ est définie comme suit. Pour $y \in F$,

$$\phi(y) = \begin{cases} \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x | Y = y) & \text{si } y \in F_Y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[Propriété de croissance]

Si $X \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}[X | Y] \geq 0$ p.s.

En particulier, si $X \geq X'$ p.s. alors $\mathbb{E}[X | Y] \geq \mathbb{E}[X' | Y]$ p.s.

[Propriété de linéarité] Pour $Z \in L^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\mathbb{E}[X + \lambda Z | Y] = \mathbb{E}[X | Y] + \lambda \mathbb{E}[Z | Y]$ p.s.

[Propriété d'espérance totale]

$\mathbb{E}[X | Y]$ est L^1 et $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}[X]$.

[Propriété de sortie] Pour $h : F \rightarrow \mathbb{R}$ bornée :

$\mathbb{E}[h(Y)X | Y] = h(Y)\mathbb{E}[X | Y]$ p.s.

En particulier, $\mathbb{E}[h(Y) | Y] = h(Y)$ p.s.

[Propriété de convexité - inégalité de Jensen]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Si $X \in L^1$ et $f(X) \in L^1$, alors

$\mathbb{E}[f(X) | Y] \geq f(\mathbb{E}[X | Y])$ p.s.

En particulier, $|\mathbb{E}[X | Y]| \leq \mathbb{E}[|X| | Y]$ p.s.

On dit qu'une variable aléatoire Y est Z -mesurable si $Y = F(Z)$ pour une fonction F .

[Propriété d'emboîtement]

Si Y est Z -mesurable :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Z] | Y].$$

↪ En particulier, pour $1 \leq i \leq n$:

$$\mathbb{E}[X | Y_1, \dots, Y_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y_1, \dots, Y_n] | Y_1, \dots, Y_i].$$

Ici notation utile :

$$\mathbb{E}[X | Y_1, \dots, Y_i] = \mathbb{E}[X | (Y_1, \dots, Y_i)].$$

Propriétés liées à l'indépendance.

[Propriété d'indépendance]

Si X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[X] \text{ p.s.}$$

[Propriété de sortie par indépendance]

Pour Z v. a. à valeurs dans $E' \subset \mathbb{R}$, dénombrable borné :

si Z est indépendante de (X, Y) , alors $\mathbb{E}[XZ | Y] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[X | Y]$ p.s.