

# MÉMOIRE DE M2

---

## Géodésiques dans les limites d'échelle de quadrangulations aléatoires en genre arbitraire

---

Igor Kortchemski

D'après l'article de G. Miermont: *Tesselations of random maps of arbitrary genus*

*Université Paris XI, Orsay, France*

Février 2010

### Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions des propriétés métriques d'un objet probabiliste limite en suivant un article de Miermont. Plus précisément, nous considérons une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'espace des quadrangulations biparties à poids et montrons qu'elle admet une sous-suite qui converge en loi au sens de la topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov sur l'ensemble des espaces métriques compacts à poids. Nous montrons ensuite que deux points d'un espace limite possible sont presque toujours reliés par une unique géodésique. À cet effet, l'outil principal consiste à exploiter des propriétés combinatoires d'une nouvelle bijection introduite par Miermont entre quadrangulations biparties à  $k$  sommets distingués et cartes étiquetées à  $k$  faces afin de ramener l'étude probabiliste des quadrangulations à celle des cartes.

# 1 Introduction

## 1.1 Présentation du résultat principal

Nous nous intéressons à des propriétés métriques d'un espace métrique compact aléatoire construit comme limite d'échelle en loi de quadrangulations aléatoires biparties, qui sont des espaces métriques finis particuliers.

Précisons tout d'abord les objets d'étude. Nous considérons des graphes connexes finis plongés sur une surface en genre  $g \geq 0$  tels que les faces obtenues soient homéomorphes à des disques ouverts et possèdent exactement quatre arêtes adjacentes (voir la section 2). De tels objets sont appelés *quadrangulations en genre  $g$* . Chaque quadrangulation  $\mathbf{q}$  est naturellement munie d'une structure d'espace métrique fini grâce à sa distance de graphe  $d_{\mathbf{q}}$ . Notons  $\mathbf{Q}_g$  l'ensemble infini des quadrangulations biparties (voir définition 2.19) de genre  $g$ . À chaque quadrangulation  $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}_g$ , nous pouvons ainsi associer l'espace métrique  $X_{\mathbf{q}} = [V(\mathbf{q}), d_{\mathbf{q}}]$  et l'espace métrique à poids  $X_{\mathbf{q}}^w = [V(\mathbf{q}), d_{\mathbf{q}}, \mu_{\mathbf{q}}]$  où :

$$\mu_{\mathbf{q}} = \frac{1}{V_{\mathbf{q}}} \sum_{v \in V(\mathbf{q})} \delta_v,$$

où  $V_{\mathbf{q}}$  désigne le nombre de sommets de  $\mathbf{q}$  et tous les objets étant considérés à isométrie près (en un sens précisé ultérieurement).

Nous définissons une suite de mesures de probabilités sur  $\mathbf{Q}_g$  et nous étudions l'éventuelle convergence en loi des variables aléatoires  $X_{\mathbf{q}}^w$  au sens d'une topologie sur les classes d'isométries  $\mathbb{M}_w$  d'espaces métriques compacts à poids, définie ultérieurement.

Plus précisément, notons  $\mathbf{Q}_g$  la mesure qui charge chaque quadrangulation  $\mathbf{q}$  d'une masse  $12^{-|F(\mathbf{q})|}$ , où  $|F(\mathbf{q})|$  est le nombre de faces de  $\mathbf{q}$ . Pour un paramètre  $\beta > 0$ , nous définissons une suite de mesures de probabilités  $\mathbf{Q}_g^{(\beta/a)}$ ,  $a > 0$  sur  $\mathbf{Q}_g$  où :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_g^{(\beta)} = \frac{\mathbf{Q}_g(e^{-\beta V_{\mathbf{q}}} d\mathbf{q})}{\mathbf{Q}_g(e^{-\beta V_{\mathbf{q}}})} & \text{si } g \geq 1, \\ \mathbf{Q}_0^{(\beta)} = \frac{\mathbf{Q}_0(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\beta V_{\mathbf{q}}} d\mathbf{q})}{\mathbf{Q}_0(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\beta V_{\mathbf{q}}})}, \end{cases}$$

où  $\mathbf{Q}_g(e^{-\beta V_{\mathbf{q}}} d\mathbf{q})$  désigne la mesure absolument continue par rapport à  $\mathbf{Q}_g$  de densité  $e^{-\beta V_{\mathbf{q}}}$ . Nous visons à prouver le théorème suivant décrivant le comportement asymptotique des limites d'échelle de  $\mathbf{Q}_g^{(\beta/a)}$ .

**Théorème 1.1.** *Pour  $g \geq 0$  et  $\beta > 0$ , la famille des mesures de probabilités :*

$$\mathbf{Q}_g^{(\beta/a)} (\{(a^{-1/4} X_{\mathbf{q}}^w, a^{-1} V_{\mathbf{q}}) \in \cdot\}), \quad a > 1$$

*est relativement compacte pour la topologie de la convergence faible sur  $\mathbb{M}_w \times (0, \infty)$ , où pour un espace métrique  $X = [X, d]$  et  $\alpha > 0$ ,  $\alpha X$  désigne l'espace métrique  $[X, \alpha d]$ . De plus, si  $\mathcal{S}_g^{\beta}$  est une éventuelle loi limite sur  $\mathbb{M}_w \times (0, \infty)$ , alors sous  $\mathcal{S}_g^{\beta}$ ,  $([X, d, \mu], \nu)$  vérifie presque sûrement :*

1. *l'espace métrique  $[X, d]$  est géodésique, c'est-à-dire que pour tous  $x, y \in X$ ,  $x$  et  $y$  sont reliés par un plus court chemin de longueur  $d(x, y)$  (voir section 6.5),*
2. *pour  $\mu \otimes \mu$  presque tout  $x, y \in X$ , il existe une unique géodésique reliant  $x$  à  $y$ .*

**Remarque 1.2.** Précisons quelques points.

1. La définition de  $\mathbf{Q}_g$  est motivée par le fait que le rayon de convergence de la série génératrice sur  $\mathbf{Q}_g$  du nombre de faces d'une quadrangulation est précisément  $12^{-1}$ .
2. La distinction de genre pour la définition de  $\mathbf{Q}_g^{(\beta)}$  sera expliquée en temps utile.
3. Considérer des espaces métriques à poids permet d'avoir à disposition une mesure sur l'espace limite suivant laquelle des points peuvent être choisis (la définition précise de ce choix conditionné se fera dans la section 6.4).
4. Le théorème précédent décrit le comportement asymptotique des limites d'échelle de mesures très particulières, à savoir  $\mathbf{Q}_g^{(\beta/a)}$ . Ce choix s'explique d'une part par leur avantage technique (des conditions de domination se vérifient facilement) et d'autre part par le fait que sous ces mesures,  $V_{\mathbf{q}}$  diverge, ce qui revient intuitivement à étudier le comportement probabiliste asymptotique de quadrangulations de plus en plus grandes.

Concluons par quelques motivations. Les cartes planaires, c'est-à-dire les cartes en genre nul, ont d'abord été étudiées d'un point de vue combinatoire par Tutte [13] en lien avec le théorème des quatre couleurs. Depuis, de nombreuses familles de cartes ont été énumérées par des combinatoristes et des applications géométriques et algébriques ont été découvertes.

Chassaing et Schaeffer [4] ont initié la recherche d'une limite d'échelle continue de grandes cartes aléatoires et Schramm a posé la question de l'existence de ces limites au sens de la topologie Gromov-Hausdorff [12]. Cette étude a été rendue possible grâce à la découverte de nombreuses bijections [5, 11] entre certaines cartes particulières (des  $2p$ -angulations biparties par exemples) et des cartes plus simples, ce qui a mené à la compréhension de propriétés topologiques d'une éventuelle limite d'échelle en genre nul (voir par exemple les articles de survol [7, 9] pour plus de détails).

## 1.2 Structure du mémoire

Nous suivons en grande partie l'article de Miermont [10] en expliquant les idées sous-jacentes tout en explicitant certains arguments.

Après avoir introduit le vocabulaire des cartes (section 2), nous présentons (section 3) une nouvelle bijection de Miermont entre quadrangulations biparties retardées à  $k$  sommets distingués et cartes étiquetées à  $k$  faces qui généralise la bijection de Marcus-Schaeffer [3, 8]. Nous décomposons alors les cartes étiquetées à  $k$  faces en structures plus simples (section 4) afin d'étudier leurs limites d'échelle (section 5). Après avoir défini des topologies sur les classes d'espaces métriques compacts (à poids) (section 6), nous démontrons le théorème 1.1 (section 7).

Dans le cas  $k = 1$ , cette bijection est l'outil essentiel pour démontrer le premier point de ce théorème. En effet, nous voyons que si une quadrangulation  $\mathbf{q}$  est envoyée sur une carte étiquetée  $\mathbf{m}$ , le nombre de boules nécessaires pour recouvrir l'espace métrique  $(V(\mathbf{q}), d_{\mathbf{q}})$  est relié au module de continuité du processus des étiquettes de  $\mathbf{m}$  (lemme 4.26). Ceci, combiné avec un critère de compacité au sein des classes d'espaces métriques compacts à poids (proposition 7.7) ainsi que le comportement des limites d'échelle du processus des étiquettes de  $\mathbf{m}$  (défini en section 4 et étudié en section 5) permet d'obtenir le premier point du théorème 1.1.

Quant au second point, l'idée est d'utiliser le résultat suivant.

**Lemme 1.3.** Soit  $(E, d)$  un espace géodésique. On suppose que pour presque tout  $D$  vérifiant  $-d(x, y) \leq D \leq d(x, y)$  on a :

$$\{z \in E; d(x, z) + D = d(z, y) \text{ et il existe une géodésique } \gamma \text{ reliant } x \text{ à } y \text{ avec } z \in \gamma\}$$

est réduit à un singleton. Les éléments de ce dernier ensemble sont appelés points  $D$ -médiants entre  $x$  et  $y$ .

La bijection mentionnée, dans le cas  $k = 2$ , permet d'associer à une quadrangulation retardée  $(\mathbf{q}, (x, y), D)$  (notion définie ultérieurement) une carte étiquetée  $\mathbf{m}$  telle que toute géodésique de  $x$  à  $y$  coupe l'interface (ensemble des sommets adjacents aux deux faces de  $\mathbf{m}$ ) en un point  $D$ -médiants entre  $x$  et  $y$  (proposition 3.27 et remarque 3.28). Ainsi, après un peu de travail, l'étude de cette interface (lemme 7.13), des propriétés de la convergence des espaces métriques compacts (lemme 6.38) et la compréhension de limites d'échelle de cartes étiquetées (section 5) sont les ingrédients principaux intervenant dans la démonstration.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Présentation du résultat principal . . . . .	2
1.2	Structure du mémoire . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Cartes</b>	<b>6</b>
2.1	Cartes topologiques . . . . .	6
2.2	Cartes combinatoires . . . . .	7
2.3	Quadrangulations . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Bijection entre quadrangulations et cartes étiquetées en genre arbitraire</b>	<b>11</b>
3.1	Étiquetage d'une quadrangulation bipartie . . . . .	11
3.2	Construction d'une carte étiquetée à partir d'une quadrangulation bipartie . . . .	13
3.3	Construction d'une quadrangulation bipartie à partir d'une carte étiquetée . . . .	15
3.4	Enracinement . . . . .	19
3.5	Liens entre distances et étiquettes . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Décomposition de cartes aléatoires étiquetées</b>	<b>22</b>
4.1	Décomposition de cartes . . . . .	22
4.2	Décomposition de cartes étiquetées . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Identification des limites d'échelle de cartes aléatoires étiquetées</b>	<b>29</b>
5.1	Mesures discrètes . . . . .	29
5.2	Étude des limite d'échelle de $\widehat{WN}_m$ . . . . .	30
5.3	Étude des limite d'échelle de $WN_m$ . . . . .	31
5.4	Étude des limites d'échelle des serpents discrets . . . . .	32
5.5	Étude des limite d'échelle de $LM_{g,k}$ . . . . .	32
5.6	Cas particuliers $(g, k) = (0, 1)$ ou $(0, 2)$ . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Topologie sur les espaces métriques</b>	<b>35</b>
6.1	Convergence de variables aléatoires dans les espaces polonais . . . . .	35
6.2	Distance de Gromov-Hausdorff . . . . .	37
6.3	Distance de Gromov-Hausdorff-Prokhorov . . . . .	38
6.4	Espaces métriques marqués aléatoirement . . . . .	39
6.5	Espaces métriques géodésiques . . . . .	41
6.6	Applications . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Propriétés métriques des limites d'échelle de quadrangulations aléatoires en genre arbitraire</b>	<b>43</b>
7.1	Transformation de $(X_q, d_q)$ en un espace géodésique . . . . .	43
7.2	Tension . . . . .	43
7.3	Caractère diffusif . . . . .	45
7.4	Géodésiques . . . . .	46

## 2 Cartes

Nous définissons ici la notion de carte et donnons quelques propriétés importantes (section 2.1). Nous voyons ensuite qu'une carte peut être définie comme un objet combinatoire, ce qui permet entre autres d'explorer une à une ses faces (section 2.2). Nous nous intéressons ensuite à la classe particulière des quadrangulations (section 2.3) dont nous souhaitons étudier les limites d'échelle. Nous renvoyons à [6] pour de plus amples précisions et des applications algébriques.

### 2.1 Cartes topologiques

Nous définirons une carte comme un plongement (à isomorphisme près) d'un graphe dans une surface vérifiant certains propriétés particulières. Nous commençons par rappeler des résultats classiques concernant les surfaces.

**Définition 2.1.** On appelle *surface* toute variété topologique compacte réelle orientée de dimension 2.

On rappelle le résultat de classification suivante.

**Théorème 2.2.** Soit  $X$  une surface. Alors il existe un entier  $g \geq 0$ , appelé genre de  $X$ , tel que  $X$  est homéomorphe au tore à  $g$  trous, noté  $S_g$ .

**Définition 2.3.** Une *carte*  $\mathbf{m}$  est un plongement d'un graphe fini connexe  $\Gamma$  dans une surface  $X$  tel que :

1. deux sommets disjoints de  $\Gamma$  sont représentés par deux points distincts de  $X$ ,
2. les arêtes de  $\Gamma$  sont représentés par des chemins continus tracés sur  $X$ , qui ne peuvent s'intersecter qu'en des sommets,
3. les composantes connexes de  $X \setminus \Gamma$ , appelées *faces*, sont homéomorphes à des disques ouverts du plan.

On appelle *genre* de  $\mathbf{m}$  le genre de la surface sur laquelle  $\mathbf{m}$  est tracée (qui est bien défini d'après la formule d'Euler citée ci-après).

On dit que deux cartes  $\mathbf{m}_1 \subset X_1, \mathbf{m}_2 \subset X_2$  sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme  $\phi : X_1 \rightarrow X_2$  préservant l'orientation tel que la restriction de  $\phi$  à  $\Gamma_1$  réalise un isomorphisme de graphes avec  $\Gamma_2$ . Dans la suite, nous identifierons les cartes isomorphes.

**Exemple 2.4.** Voir les figures 1,2 pour des exemples (les cartes sont tracées dans le plan, mais peuvent être vues comme l'étant sur la sphère en compactifiant le plan par un point à l'infini, de sorte que la face extérieure est bien homéomorphe à disque ouvert).

Il est parfois commode de munir les arêtes d'une orientation et de considérer des cartes enracinées afin d'enlever d'éventuelles symétries.

**Définition 2.5.** Une arête d'une carte  $\mathbf{m}$  munie d'une origine et d'une extrémité est appelée *demi-arête*. On note  $E(\mathbf{m})$  l'ensemble des demi-arêtes de  $\mathbf{m}$ , qui est ainsi de cardinal pair. Pour  $e \in E(\mathbf{m})$ , on note  $e^-$  (resp.  $e^+$ ) l'origine (resp. l'extrémité de  $e$ ) et  $\bar{e}$  la demi-arête obtenue en orientant l'arête définie par  $e$  en sens opposé.

Une carte  $\mathbf{m}$  est dite *enracinée* si elle possède une demi-arête distinguée notée  $e_* \in E$  et appelée *racine*.

Deux cartes enracinées  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  sont dites isomorphes s'il existe un homéomorphisme vérifiant les conditions décrites à la fin de définition 2.3 envoyant la racine de  $\mathbf{m}_1$  sur la racine de  $\mathbf{m}_2$ .

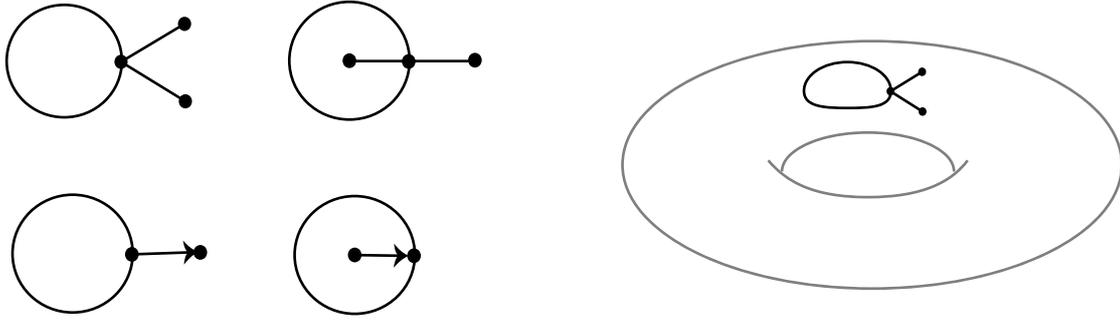


FIG. 1 – Les deux cartes en haut à gauche sont distinctes bien qu’ayant la même structure de graphe. Les deux cartes non enracinées en bas à gauche sont identiques, mais, enracinées, différent. Finalement, le graphe plongé de droite n’est pas une carte.

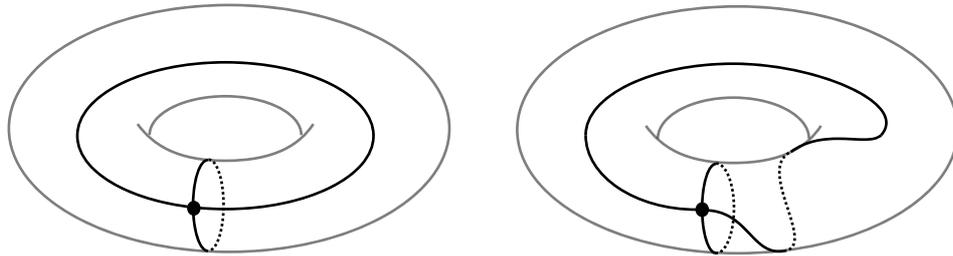


FIG. 2 – Les deux cartes sont isomorphes (l’application  $(x, y) \rightarrow (x, x + y)$  passe au quotient en un homéomorphisme de  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ ).

**Définition 2.6.** Le degré d’une face  $f$  d’une carte  $\mathbf{m}$  est le nombre d’arêtes de  $\mathbf{m}$  adjacentes à  $f$  (en comptant deux fois les arêtes appartenant à la frontière d’une seule face), qu’on notera  $\deg_{\mathbf{m}}(f)$ .

**Exemple 2.7.** Par exemple, la carte en bas à gauche de la figure 1 possède deux faces, l’une de degré 1, l’autre de degré 3.

Nous donnons maintenant un lien fondamental entre le nombre de sommets, arêtes et faces d’une carte.

**Théorème 2.8** (Formule d’Euler). *Soit  $\mathbf{m}$  une carte. Notons respectivement  $V, \mathbf{E}, F$  l’ensemble de ses sommets, arêtes, faces. Alors l’entier  $\chi(\mathbf{m}) = |V| - |\mathbf{E}| + |F|$ , appelé caractéristique d’Euler de  $\mathbf{m}$ , ne dépend que du genre de  $\mathbf{m}$  et vaut  $2 - 2g$ .*

**Remarque 2.9.** Si le plongement d’un graphe  $\Gamma$  dans une surface est une carte  $\mathbf{m}$ , le genre de  $\mathbf{m}$  n’est pas déterminé par la structure de graphe de  $\Gamma$  (voir figure 3).

## 2.2 Cartes combinatoires

Nous venons de définir la notion de carte de manière topologique, c’est-à-dire en imposant des conditions topologiques sur un plongement d’un graphe sur une surface. De manière totalement équivalente, nous allons définir les cartes de manière combinatoire et abstraite grâce à un codage par un triplet de permutations  $(\sigma, \alpha, \phi)$  vérifiant certaines conditions.

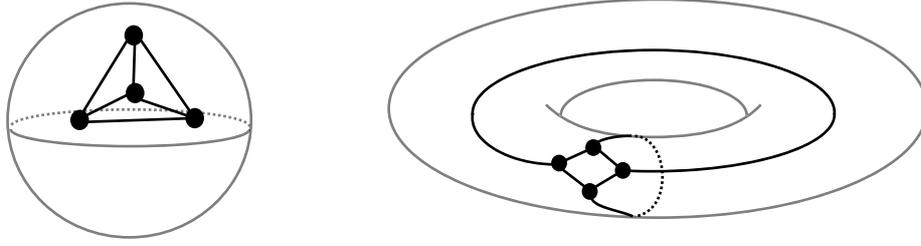


FIG. 3 – Les deux cartes sont de genres distincts bien qu’ayant la même structure de graphe.

**Proposition 2.10.** Soit  $\mathbf{m}$  une carte et numérotions ses demi-arêtes de 1 à  $2|\mathbf{E}|$  de manière quelconque. Définissons des permutations  $\sigma, \alpha, \phi$  ( $\sigma$  pour « sommets » et  $\phi$  pour « faces ») comme suit :

1. pour  $e \in E$ , on pose  $\alpha(e) = \bar{e}$ ,
2. pour  $e \in E$ , on pose  $\sigma(e) = e'$  où  $e'$  désigne la demi-arête issue du même sommet que  $e$  située immédiatement après  $e$  dans le sens anti-horaire (rappelons que la carte est tracée sur une surface orientée),
3. on pose finalement  $\phi = \sigma^{-1}\alpha^{-1}$ .

**Remarque 2.11.** Ainsi, les cycles de  $\sigma$  sont en bijection avec les différents ensembles constitués de demi-arêtes issues d’un même sommet et les cycles de  $\phi$  sont en bijection avec les faces de  $\mathbf{m}$ . Cette construction peut se voir intuitivement comme suit : chaque arête de  $\mathbf{m}$  est vue comme une route à deux voies où les voitures circulent à gauche, les sommets de  $\mathbf{m}$  sont des rond-points connectant les routes. Alors les cycles de  $\sigma$  correspondent aux routes issues d’un même rond-point, les cycles de  $\phi$  correspondent aux routes empruntées en tournant toujours à gauche à un rond-point et l’action de  $\alpha$  consiste à effectuer un demi-tour (voir figure 4).

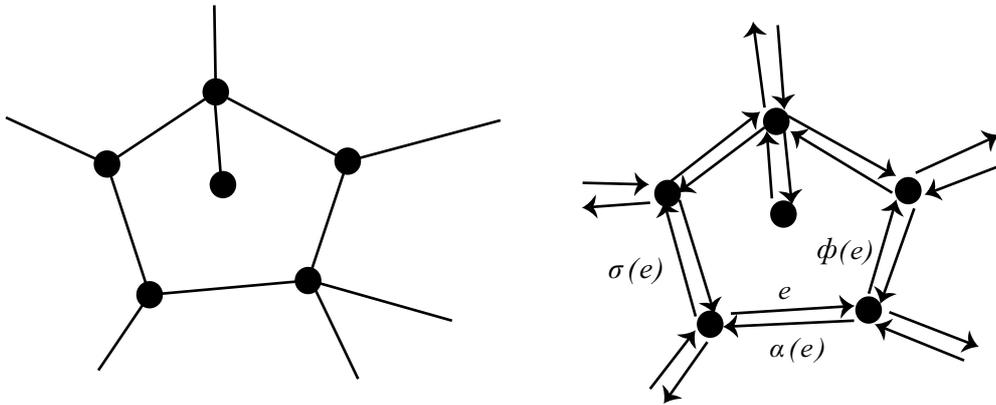


FIG. 4 – Une partie d’une carte représentant une carte de degré 7, une demi-arête  $e$  et ses images sous l’action de  $\sigma, \alpha$  et  $\phi$ .

**Remarque 2.12.** On peut montrer que, réciproquement, étant donné un triplet de permutations  $(\sigma, \alpha, \phi)$  agissant sur le même ensemble tel que  $\phi\alpha\sigma = 1$  et  $\alpha$  soit une involution sans point fixe, il existe une carte  $\mathbf{m}$  dont le triplet associée est  $(\sigma, \alpha, \phi)$ .

**Remarque 2.13.** On dit que deux triplets  $(\sigma, \alpha, \phi), (\sigma', \alpha', \phi')$  agissant sur le même ensemble  $E$  et vérifiant les conditions précédentes sont isomorphes s'il existe une bijection  $h : E \rightarrow E$  telle que  $\sigma' = h^{-1}\sigma h, \alpha' = h^{-1}\alpha h$  et  $\phi' = h^{-1}\phi h$ . On voit qu'alors deux triplets sont isomorphes si, et seulement si, les deux cartes qu'ils déterminent sont isomorphes (voir figure 5). Par exemple, on retrouve bien que les deux cartes de la figure 2 sont identiques.

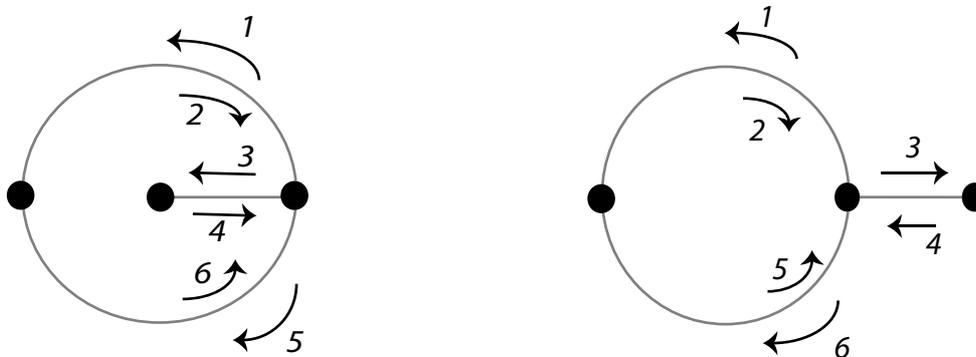


FIG. 5 – Pour la première carte, en optant pour une représentation sous forme de cycles de permutations,  $\sigma = (135)(4)(26)$  et  $\phi = (1634)(25)$ ; pour la deuxième carte  $\sigma' = (163)(4)(25)$  et  $\phi' = (2346)(15)$ . La bijection  $h$  définie par  $h(1) = 6, h(2) = 5, h(3) = 3, h(4) = 4, h(5) = 1, h(6) = 2$  conjugue  $\phi, \sigma$  avec respectivement  $\phi', \sigma'$ .

**Définition 2.14.** Soit  $\mathbf{m}$  une carte et  $(\sigma, \alpha, \phi)$  un triplet associé. Considérons une demi-arête  $e \in E$ . Alors  $e$  appartient à un unique cycle de  $\sigma$  et à un unique cycle de  $\phi$  déterminant ainsi de manière unique un sommet (l'origine de  $e$ ) et une face (la face située immédiatement à gauche de  $e$  dans  $\mathbf{m}$ ). Ainsi, pour une face  $f$  de  $\mathbf{m}$ , nous écrivons  $e \in f$  si  $e$  appartient au cycle de  $\phi$  associé à  $f$ .

**Remarque 2.15.** Pour une carte  $\mathbf{m}$ , si  $e \in E(\mathbf{m})$  et  $f \in F(\mathbf{m})$  avec  $e \in f$ , alors l'ensemble des demi-arêtes

$$\{\phi^i(e); 0 \leq i \leq \deg_{\mathbf{m}}(f) - 1\}$$

est exactement l'ensemble des demi-arêtes incidentes à  $f$ . Ainsi,  $\phi$  permet d'explorer une à une les faces de  $\mathbf{m}$ .

Il sera également commode de considérer l'ensemble des arêtes situées entre deux points d'une même face.

**Définition 2.16.** Pour une carte  $\mathbf{m}$ , si  $e_1, e_2 \in E(\mathbf{m})$  et  $f \in F(\mathbf{m})$  avec  $e_1, e_2 \in f$  et  $e_1 \neq e_2$ , on note  $[e_1, e_2]$  l'ensemble :

$$[e_1, e_2] = \{\phi^i(e_1); i \geq 0, e_2 \notin \{\phi^j(e_1); 0 \leq j \leq i - 1\}\}.$$

On notera  $[e, e] = \{e\}$ ,  $(e_1, e_2) = [e_1, e_2] \setminus \{e_1\}$  et ainsi de suite.

**Remarque 2.17.** Une demi-arête  $e$  de  $\mathbf{m}$  définit de manière unique un sommet, mais pas réciproquement. Notons cependant que la donnée de l'intersection d'un petit voisinage autour de l'origine de  $e$  et de l'espace situé entre  $e$  et  $\sigma(e)$ , appelé *coin*, définit de manière unique  $e$  et réciproquement.

Finissons par définir la notion de géodésique dans une carte.

**Définition 2.18.** Pour une carte  $\mathbf{m}$  et  $x, y \in V(\mathbf{m})$ , on dit que des demi-arêtes  $e_1, \dots, e_n$  forment une *chaîne* de  $x$  à  $y$  si  $e_1^- = x, e_n^+ = y$  et  $e_i^+ = e_{i+1}^-$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$ . On définit également la distance de graphe  $d_{\mathbf{m}}(x, y)$  comme étant le plus petit entier  $n$  tel qu'il existe une chaîne de longueur  $n$  de  $x$  à  $y$ . Toute chaîne de  $x$  à  $y$  de longueur  $d_{\mathbf{m}}(x, y)$  est appelée *géodésique*.

## 2.3 Quadrangulations

**Définition 2.19.** Une carte est dite *bipartie* si ses sommets peuvent être coloriés avec deux couleurs distinctes de sortes que les couleurs de deux sommets voisins quelconques diffèrent.

**Définition 2.20.** Une *quadrangulation* est une carte dont toutes les faces sont de degré 4. On note  $\mathbf{Q}_g$  l'ensemble des quadrangulations biparties de genre  $g$ .

**Remarque 2.21.** Toutes les quadrangulations en genre nul sont biparties, mais ce n'est pas vrai en genre supérieur (voir figure 6).

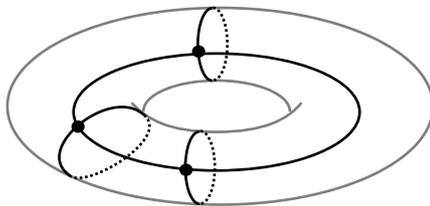


FIG. 6 – Quadrangulation non bipartie en genre un.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la formule d'Euler.

**Proposition 2.22.** Pour  $q \in \mathbf{Q}_g$ , on a  $4|F| = 2|\mathbf{E}| = |E|$  et  $|V| = |F| + \chi$ .

### 3 Bijection entre quadrangulations et cartes étiquetées en genre arbitraire

Notre but est d'établir, en genre  $g \geq 0$  fixé, une bijection entre l'ensemble des quadrangulations biparties « retardées » à  $k$  sommets distingués et l'ensemble des cartes étiquetées à  $k$  faces distinguées. Nous verrons que cette bijection permet de contrôler les distances de certains sommets aux sommets distingués.

Afin d'associer à une quadrangulation bipartie « retardée » à  $k$  sommets distingués  $\mathbf{q}$  une carte étiquetée à  $k$  faces nous allons :

1. étiqueter les sommets de la quadrangulation par des entiers,
2. relier certaines paires de sommets non distingués par de nouvelles arêtes dans un plongement quelconque de  $\mathbf{q}$ ,
3. effacer les anciennes arêtes de la quadrangulation originelle ainsi que les sommets distingués pour finalement obtenir une carte étiquetée.

Notons que la carte étiquetée sera tracée sur la même surface que la quadrangulation dont elle est issue et que ses sommets proviendront de sommets de la quadrangulation originelle.

#### 3.1 Étiquetage d'une quadrangulation bipartie

Expliquons d'abord la première étape de la construction.

**Définition 3.1.** Notons  $\mathbf{Q}_{g,k}^\circ$  l'ensemble des triplets  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ , appelés *quadrangulations retardées à  $k$  sommets distingués*, où :

- (Q1) :  $\mathbf{q}$  est une quadrangulation bipartie (non enracinée) de genre  $g$ ,
- (Q2) :  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$  est un  $k$ -uplet d'éléments distincts de  $V(\mathbf{q})$ , appelés *sommets distingués*,
- (Q3) :  $D = [d_1, \dots, d_k]$  est un élément de l'ensemble des vecteurs de retard  $\mathcal{D}(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ , étant définis comme des éléments de  $\mathbb{Z}^k$  à constante additive commune près tels que :

$$\text{pour } 1 \leq i \neq j \leq k : \quad |d_i - d_j| < d_{\mathbf{q}}(x_i, x_j) \quad (1)$$

et

$$\text{pour } 1 \leq i, j \leq k : \quad d_{\mathbf{q}}(x_i, x_j) \text{ et } d_i - d_j \text{ ont même parité.} \quad (2)$$

L'étiquetage peut être visualisé intuitivement comme suit : pour chaque  $1 \leq i \leq k$ , à partir de l'instant  $d_i$ , de l'eau est injectée continuellement au sommet  $x_i$  et chaque arête symbolise un tuyau pouvant être parcouru en une unité de temps. L'eau se propage alors à travers les tuyaux et nous associons à chaque sommet de la quadrangulation le plus petit instant à partir duquel il est irrigué. La condition (1) signifie que lorsque de l'eau est injectée au sommet  $x_i$  à l'instant  $d_i$ , celui-ci n'est pas encore irrigué. La condition (2) signifie que deux filets d'eau ne se croisent qu'en des sommets.

**Proposition 3.2.** Soit  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D = [d_1, \dots, d_k]) \in \mathbf{Q}_{g,k}^\circ$ . Pour  $1 \leq i \leq k$  et  $x \in V(\mathbf{q})$ , définissons  $\mathbf{l}_i(x) = d_i + d_{\mathbf{q}}(x, x_i)$  (correspondant au premier instant où le filet d'eau injecté en  $x_i$  à l'instant  $d_i$  atteint  $x$ ) et :

$$\mathbf{l}(x) = \min_i (d_i + d_{\mathbf{q}}(x, x_i)), \quad (3)$$

correspondant au premier instant où  $x$  est irrigué. Alors pour tous  $x, y \in V(\mathbf{q})$  voisins :

$$|\mathbf{l}_i(x) - \mathbf{l}_i(y)| = 1 \quad \text{et} \quad |\mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(y)| = 1.$$

**Preuve.** Remarquons tout d'abord que  $\mathbf{l}_i(x) - \mathbf{l}_i(y) = d_{\mathbf{q}}(x, x_i) - d_{\mathbf{q}}(y, x_i) \leq d_{\mathbf{q}}(x, y) = 1$ . Par symétrie, il vient donc  $|\mathbf{l}_i(x) - \mathbf{l}_i(y)| \leq 1$ . De plus, dans une coloration bicolore de la quadrangulation,  $d_{\mathbf{q}}(x_i, x)$  est pair si, et seulement si,  $x_i$  et  $x$  sont de même couleur. Comme  $x$  et  $y$  sont voisins, ils sont coloriés différemment, ce qui implique que  $|\mathbf{l}_i(x) - \mathbf{l}_i(y)|$  est impair. Ainsi,  $|\mathbf{l}_i(x) - \mathbf{l}_i(y)| = 1$ .

Supposons par l'absurde que  $|\mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(y)| > 1$ , par exemple  $\mathbf{l}(x) = \mathbf{l}(y) + u$  avec  $u \geq 2$ . Soit alors  $i$  tel que  $\mathbf{l}(y) = \mathbf{l}_i(y)$ . Alors d'après ce qui précède :

$$\mathbf{l}_i(x) \geq \mathbf{l}(x) = \mathbf{l}_i(y) + u = \mathbf{l}_i(x) + \epsilon + u,$$

avec  $\epsilon = \pm 1$ , impliquant  $u + \epsilon \leq 0$ , ce qui est absurde. Remarquons ensuite que d'après la condition (2),  $\mathbf{l}_i(x_1) - \mathbf{l}_j(x_1) = d_{\mathbf{q}}(x_1, x_i) + d_1 - d_i - (d_{\mathbf{q}}(x_1, x_j) + d_1 - d_j) + 2(d_i - d_j)$  ce qui implique que  $\mathbf{l}_i(x_1) - \mathbf{l}_j(x_1)$  est pair. D'après le premier point de la proposition, ceci fournit que  $\mathbf{l}_i - \mathbf{l}_j$  ne prend que des valeurs paires. Ainsi, si  $\mathbf{l}_i(x) = \mathbf{l}_j(y)$ , alors  $\mathbf{l}_i(x) - \mathbf{l}_j(x) = \epsilon$  avec  $\epsilon = \pm 1$ , ce qui est absurde. On en déduit que  $\mathbf{l}(x) \neq \mathbf{l}(y)$ , ce qui démontre bien que  $|\mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(y)| = 1$ . ■

En utilisant cet étiquetage, une orientation sur  $E(\mathbf{q})$  est définie comme suit.

**Définition 3.3.** Notons  $E_{1/2} \subset E(\mathbf{q})$  l'orientation où, pour une arête  $e \in E(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{l}(e^+) = \mathbf{l}(e^-) - 1$ , de sorte que  $l$  décroît selon les arêtes orientées  $E_{1/2}$  (voir par exemple la figure 7).

**Proposition 3.4.** Soit  $x \in V(\mathbf{q})$  et considérons un chemin orienté  $\gamma$  qui suit les arêtes de  $E_{1/2}$  en commençant par le sommet  $x$  et finissant en  $x_i$ . Alors  $\gamma$  est une géodésique.

**Preuve.** Comme  $l$  diffère d'une unité entre sommets voisins,  $l$  diminue d'une unité entre deux sommets consécutifs visités par  $\gamma$ . Ainsi, si  $y$  visité par  $\gamma$ , on a  $\mathbf{l}_i(y) = \mathbf{l}(y)$ . En particulier, comme  $\mathbf{l}(x) = d_{\mathbf{q}}(x, x_i) + d_i$  et  $\mathbf{l}(x_i) = d_i$ ,  $\gamma$  est de longueur  $d_{\mathbf{q}}(x, x_i)$ . Ainsi,  $\gamma$  est une géodésique. ■

**Définition 3.5.** Notons  $E_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  l'ensemble des arêtes  $e$  vérifiant la propriété suivante : le chemin maximal obtenu partant de  $e$ , suivant l'orientation  $E_{1/2}$  et tournant à gauche le plus possible aboutit en  $x_i$ .

**Remarque 3.6.** L'exemple de la figure 7 montre qu'il peut exister plusieurs chemins maximaux partant d'un même sommet, ce qui explique pourquoi on impose la condition de tourner le plus à gauche possible. Remarquons également que les  $E_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  forment une partition de  $E_{1/2}$ .

**Définition 3.7.** Notons  $V_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D) = \{x_i\} \cup \{e^-; e \in E_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)\}$  de sorte que les  $V_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  forment une partition de  $V(\mathbf{q})$ .

La proposition suivante est immédiate compte tenu de la définition de  $E_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ .

**Proposition 3.8.** Pour  $x \in V_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ , on a  $d_{\mathbf{q}}(x, x_i) = \mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(x_i)$ .

**Remarque 3.9.** On peut interpréter  $V_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  comme le « bassin d'attraction » de  $x_i$ , puisque la distance entre un sommet  $x$  de cet ensemble et  $x_i$  s'obtient simplement comme différence des étiquettes de  $x$  et  $x_i$ . Remarquons d'autre part que la distance entre un  $x \in V_j(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  (avec  $j \neq i$ ) et  $x_i$  ne peut s'obtenir uniquement à partir des étiquettes de  $x$  et de  $x_i$ .

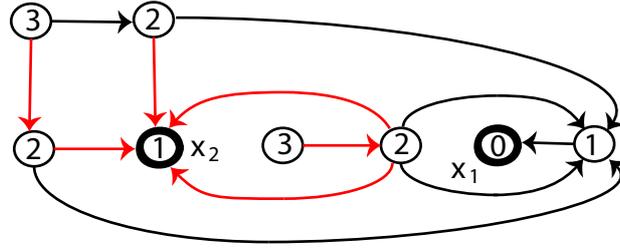


FIG. 7 – Un exemple de quadrangulation en genre nul, de délais  $d_1 = 0$  et  $d_2 = 1$ , orientée selon  $E_{1/2}$  où les arêtes  $E_2(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  sont coloriées en rouge et les autres en noir.

### 3.2 Construction d'une carte étiquetée à partir d'une quadrangulation bipartie

Commençons par définir ce qu'on entend par « carte étiquetée ».

**Définition 3.10.** Un étiquetage d'un graphe  $G$  est une application  $\mathbf{l} : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que pour tous  $x, y \in V(G)$  voisins,  $|\mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(y)| \leq 1$ . Notons  $\mathbf{LM}_{g,k}^\circ$  les couples  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$  tels que :

- (LM1) :  $\mathbf{m}$  est une carte de genre  $g$  avec  $k$  faces distinguées  $f_1(\mathbf{m}), \dots, f_k(\mathbf{m})$ ,
- (LM2) :  $\mathbf{l} = (l(x), x \in V(\mathbf{m}))$  est un étiquetage de  $\mathbf{m}$  et  $[\mathbf{l}]$  désigne sa classe à constante additive commune près.

Dans cette partie,  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  désignera un élément fixé de  $\mathbf{Q}_{g,k}^\circ$ . Nous allons associer à  $q$  un élément de  $\mathbf{LM}_{g,k}^\circ$  comme précisé en introduction. Fixons un plongement de  $\mathbf{q}$  dans  $S_g$  et soit  $(d_1, \dots, d_k)$  un représentant quelconque de  $D$ . Notons  $\mathbf{l}$  l'étiquetage de  $\mathbf{q}$  défini par (3). Lorsque nous parcourons une face quelconque  $f$  de  $\mathbf{q}$  dans le sens trigonométrique en commençant par l'étiquette la plus basse de  $f$ , nous lisons  $l, l+1, l+2, l+1$  ou bien  $l, l+1, l, l+1$ .

- Dans le premier cas, nous relierons, à l'intérieur de  $f$ , le sommet de plus haute étiquette au sommet qui le suit dans le sens anti-trigonométrique. Ceci a pour effet de transformer de  $f$  en deux faces, l'une de degré 4, l'autre de degré 2.
- Dans le second cas, nous relierons, à l'intérieur de  $f$ , les deux sommets d'étiquettes les plus élevées. Ceci a pour effet de transformer  $f$  en deux faces, chacune de degré 3.

Ces opérations sont schématisées dans la figure 8. Les arêtes tracées de la sorte seront appelées « nouvelles arêtes ». Voir la figure 9 pour des exemples.

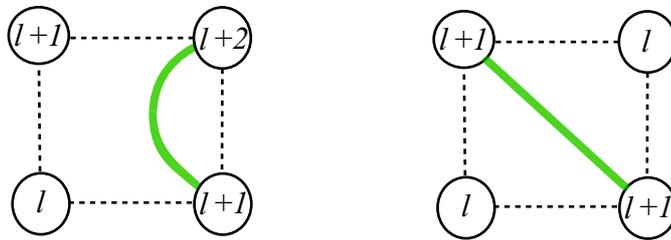


FIG. 8 – Ajout d'arêtes (en vert) à une face de  $\mathbf{q}$  suivant les deux cas de figure rencontrés.

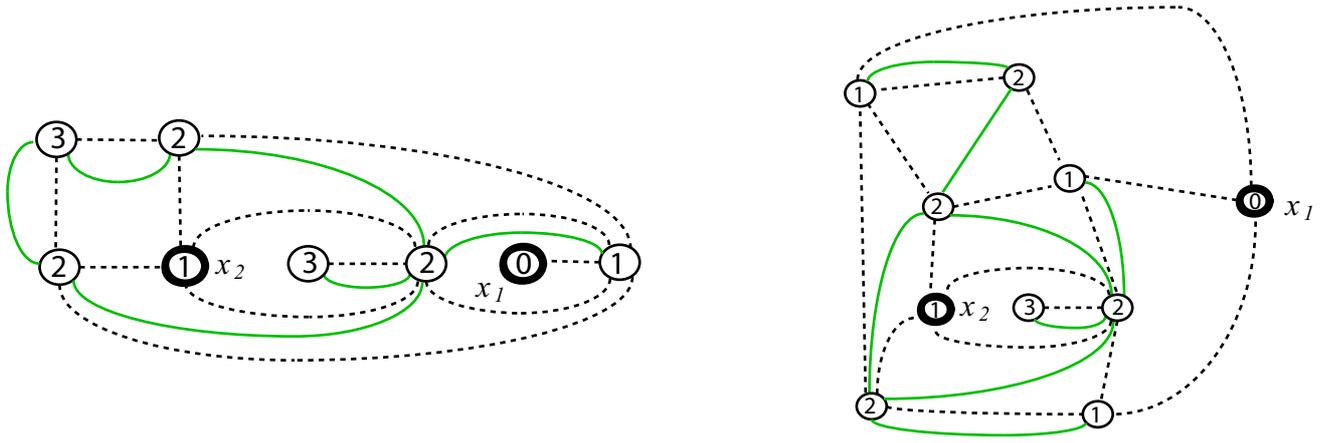


FIG. 9 – Construction d’une carte étiquetée (dont les arêtes sont colorées en vert) à partir d’une quadrangulation bipartite à 2 sommets distingués (dont les arêtes sont en pointillés).

Après ajout de certaines arêtes (une pour chaque face de  $\mathbf{q}$ ), nous avons ainsi obtenu une nouvelle carte  $\mathbf{q}'$  dont les faces sont de degré 2, 3 ou 4, étiquetée par  $l$  et telle que  $V(\mathbf{q}') = V(\mathbf{q})$ . Ceci découle immédiatement de nos deux règles.

**Proposition 3.11.** Pour  $x \in V(\mathbf{q})$ , il existe une nouvelle arête adjacente à  $x$  si, et seulement si,  $x \notin \{x_1, \dots, x_k\}$ .

**Preuve.** Soit  $f$  une face contenant  $x_i$  sur son bord. Alors les étiquettes des voisins de  $x_i$  sur  $f$  sont toutes strictement supérieures à  $\mathbf{l}(x_i)$ , ce qui, compte tenu des deux règles précédentes, implique que  $x_i$  n’est pas l’extrémité de la nouvelle arête ajoutée dans  $f$ .

Réciproquement, si  $x \in V(\mathbf{q})$  n’est pas l’un des sommets distingués  $x_i$ , il existe une arête  $e \in E(\mathbf{q})$  telle que  $e^- = x$  et  $l(e^+) = l(x) - 1$ . On voit qu’alors  $x$  est l’extrémité d’une nouvelle arête ajoutée dans la face située à droite de  $e$  (voir par exemple la figure 9). ■

**Définition 3.12.** Notons  $\mathbf{m}$  le graphe plongé obtenu à partir de  $\mathbf{q}'$  en effaçant les arêtes de  $\mathbf{q}$  ainsi que les sommets  $x_1, \dots, x_k$ .

**Proposition 3.13.** Le graphe plongé  $\mathbf{m}$  vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\mathbf{m}$  est une carte,
2. chaque face de  $\mathbf{m}$  contient exactement un élément parmi  $\{x_1, \dots, x_k\}$ ,
3.  $V(\mathbf{m}) = V(\mathbf{q}) \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ ,
4. si  $\mathbf{l} = (\mathbf{l}(x), x \in V(\mathbf{q}) \setminus \{x_1, \dots, x_k\})$ ,  $\mathbf{l}$  est un étiquetage de  $\mathbf{m}$  qui fait de  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$  un élément de  $\mathbf{LM}_{g,k}^\circ$ .

**Preuve.** Afin d’identifier les faces de  $\mathbf{m}$ , nous allons introduire un sous-graphe du graphe dual de  $\mathbf{q}'$  dont les composantes connexes vont s’identifier aux faces de  $\mathbf{m}$ . Rappelons que  $\mathbf{q}'$  désigne la carte plongée construite précédemment et dont les faces sont de degré 2, 3 ou 4. Considérons les arêtes du graphe dual de  $\mathbf{q}'$  qui n’intersectent pas de nouvelles arêtes, qu’on oriente suivant les règles indiquées dans la figure 10, à savoir qu’un sommet de  $\mathbf{q}'$  situé à la droite d’une arête

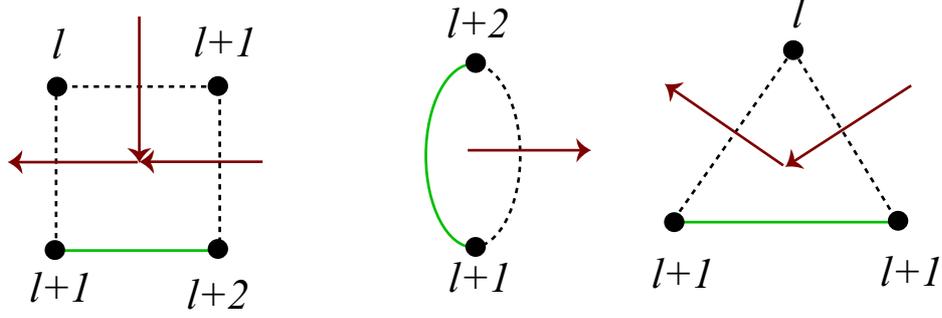


FIG. 10 – Ajout et orientation de certaines arêtes duales de  $\mathbf{q}'$ .

orientée duale porte une étiquette inférieure à celle du sommet située à sa gauche. Notons  $E_{1/2}^d$  l'ensemble de ces arêtes (voir par exemple la figure 11).

D'après la figure 10, pour chaque face  $f$  de  $\mathbf{q}'$ , une et une seule arête de  $E_{1/2}^d$  est issue de  $f$ . Ceci implique qu'il existe une unique chaîne infinie d'arêtes  $(e_m^d)_m$  de  $E_{1/2}^d$  issue de  $f$ . Comme l'ensemble des faces de  $\mathbf{q}'$  est fini, cette chaîne finit par boucler. D'après la définition de l'orientation, les étiquettes des sommets situés immédiatement à droite des arêtes visités par cette chaîne sont constantes à partir d'un certain rang. La figure 10 montre que la seule possibilité est que la chaîne encercle un sommet  $x$  à partir d'un certain rang. D'après la propriété 3.11,  $x \in \{x_1, \dots, x_k\}$ .

Il en découle que le graphe orienté défini par  $E_{1/2}^d$  possède exactement  $k$  composantes connexes. Par suite,  $\mathbf{m}$  a  $k$  faces. Pour montrer que chaque face de  $\mathbf{m}$  est homéomorphe à un disque, remarquons que l'union des faces et des arêtes de  $\mathbf{q}'$  adjacentes à un  $x_i$  est homéomorphe à un disque. On en déduit qu'en recollant de proche en proche les faces visitées par  $(e_m^d)_m$ ,  $\mathbf{m}$  est bien une carte.

Les autres propriétés sont immédiates. ■

**Définition 3.14.** Pour  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D) \in \mathbf{Q}_{g,k}^\circ$ , notons  $\Psi_{g,k}^\circ(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D) = (\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$  la carte étiquetée construite comme précédemment à partir  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ . La face  $f_i(\mathbf{m})$  est définie comme celle contenant  $x_i$ .

**Remarque 3.15.** Remarquons que la carte étiquetée  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$  construite à partir de  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  ne dépend ni du plongement de  $\mathbf{q}$  dans  $S_g$ , ni du choix du représentant de  $D$ .

### 3.3 Construction d'une quadrangulation bipartie à partir d'une carte étiquetée

Nous construisons ici  $\Phi_{g,k}^\circ$  et vérifions qu'elle est l'application réciproque de  $\Psi_{g,k}^\circ$ . Dans cette partie,  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) \in \mathbf{LM}_{g,k}$  ainsi qu'un plongement de  $\mathbf{m}$  dans  $S_g$  seront fixés, et notre but est de construire la quadrangulation bipartie associée.

À cet effet, l'idée est d'appliquer la bijection de Marcus-Schaeffer dans chacune des  $k$  faces de  $\mathbf{m}$ . Pour commencer, pour  $1 \leq i \leq k$ , ajoutons un sommet noté  $x_i$  à l'intérieur de la  $i$ -ème face  $f_i(\mathbf{m})$  et étendons  $\mathbf{l}$  en posant :

$$\mathbf{l}(x_i) = \min_{e \in f_i(\mathbf{m})} \mathbf{l}(e) - 1.$$

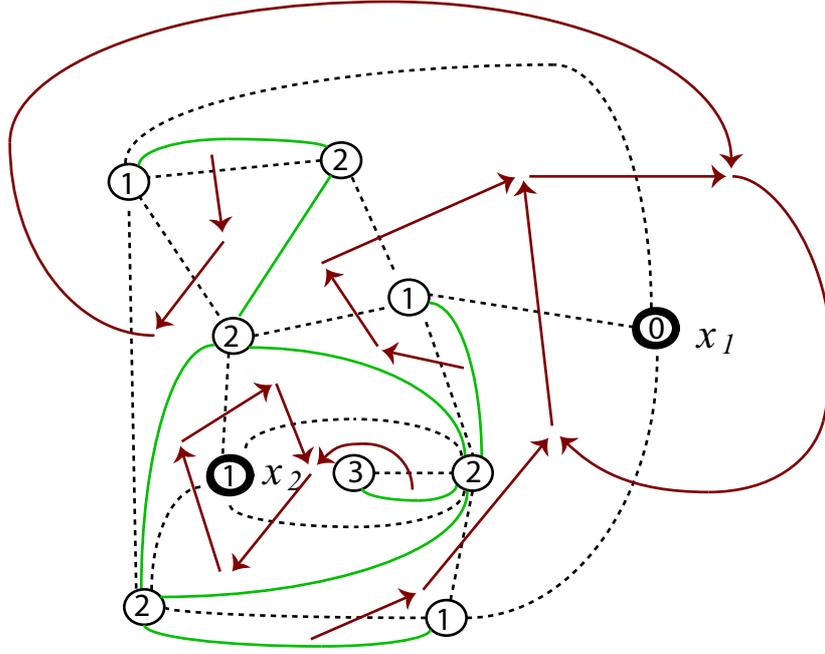


FIG. 11 – Exemple d'ajout et d'orientation de certaines arêtes duales de  $\mathbf{q}$ .

Dans la formule précédente et dans tout ce qui suit, par souci de simplification, on note aussi  $l(e)$  l'étiquette portée par l'origine de  $e$  (c'est-à-dire  $l(e^-)$ ).

**Définition 3.16.** Notons  $(\sigma, \alpha, \phi)$  le triplet de permutations associés à la carte  $\mathbf{m}$ . Pour une arête  $e \in f_i(\mathbf{m})$ , on définit le *successeur* de  $e$  par  $s(e) = x_i$  si  $\mathbf{l}(e) = \mathbf{l}(x_i) + 1$ , et sinon par :

$$s(e) = \phi^{m(e)}(e),$$

où :

$$m(e) = \min\{m \geq 1; \mathbf{l}(\phi^m(e)) = \mathbf{l}(e) - 1\}.$$

**Proposition 3.17.** Pour  $e \in f_i(\mathbf{m})$ , il est possible de tracer une arête entre les coins incidents aux arêtes  $e$  et  $s(e)$  de sorte que ces arêtes ne se coupent pas.

**Preuve.** D'une part, si  $s(e) \notin \{x_1, \dots, x_k\}$  et  $e' \in (e, s(e))$ , alors  $\mathbf{l}(e') \geq \mathbf{l}(e)$ , ce qui force à avoir  $s(e') \in (e, s(e)]$ . D'autre part, si  $s(e) = x_i$  et  $e \in (e', s(e'))$  avec  $s(e') \neq x_i$ , alors  $\mathbf{l}(x_i) = \mathbf{l}(e) - 1 \geq \mathbf{l}(e') - 1 = \mathbf{l}(s(e'))$ , ce qui contredit la minimalité de  $\mathbf{l}(x_i)$ . ■

**Définition 3.18.** Soit  $\mathbf{q}$  le graphe plongé obtenu à partir de  $\mathbf{m} \cup \{x_1, \dots, x_k\}$  en ajoutant au sein de chaque face de  $\mathbf{m}$  une nouvelle arête entre une arête et son successeur de sorte qu'aucun croisement n'apparaisse, puis en effaçant les anciennes arêtes pour ne garder que celles qui ont été ajoutées (voir par exemple la figure 9).

**Proposition 3.19.** Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. le graphe plongé  $\mathbf{q}$  est une quadrangulation bipartie,
2. pour  $x \in V(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{l}(x) = \min_{1 \leq i \leq k} (d_{\mathbf{q}}(x_i, x) + d_i)$ ,

3. l'ensemble des arêtes de  $q$  orientées de  $e$  vers  $s(e)$  pour  $e \in f_i(\mathbf{m})$  est égal à  $E_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  (comparer les figures 7 et 9)
4. si  $D = [d_1, \dots, d_k]$ , alors  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D) \in \mathbf{Q}_{g,k}^\circ$  où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ ,

**Preuve.** Démontrons d'abord le premier point. Soit  $e$  une arête de  $\mathbf{m}$  d'étiquette  $\mathbf{l}(e) = l$ , de sorte que  $\mathbf{l}(s(e)) = l - 1$ , et distinguons plusieurs cas.

Si  $\mathbf{l}(\phi(e)) = l$ , alors  $e, \phi(e), s(e) = s(\phi(e))$  forment un triangle de base  $e$ . De même,  $\bar{e}, \phi(\bar{e}), s(\bar{e}) = s(\phi(\bar{e}))$  forment un triangle de base  $\bar{e}$ . Par suite, la suppression de l'arête  $e$  crée une face de degré 4 homéomorphe à un disque (premier cas de la figure 12).

Si  $\mathbf{l}(\phi(e)) \neq l$ , alors soit  $\mathbf{l}(\phi(e)) = l + 1$ , soit  $\mathbf{l}(\phi(e)) = l - 1$ . Dans le premier cas de figure, on voit que  $s(s(\phi(e))) = s(e)$ . De plus, le successeur de  $\bar{e}$  est  $\phi(\bar{e})$ . On en déduit que la suppression de l'arête  $e$  engendre une face de degré 4 homéomorphe à un disque (deuxième cas de la figure 12). Le cas où  $\mathbf{l}(\phi(e)) = l - 1$  se traite de la même manière.

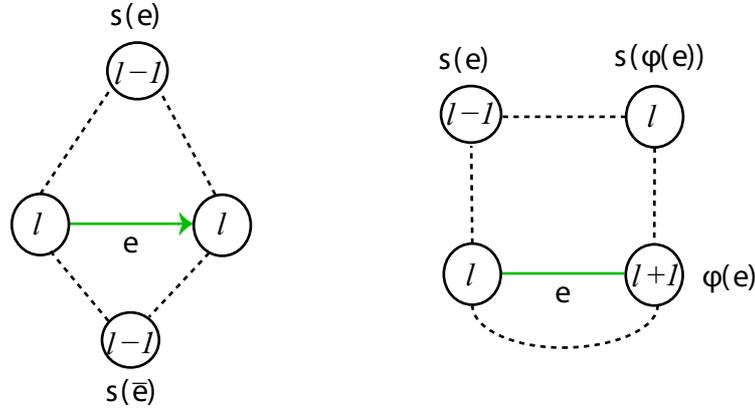


FIG. 12 – Ajout d'arêtes en pointillés entre une arête et son successeur autour d'une arête  $e$  de  $\mathbf{m}$ .

Pour une arête  $e \in \mathbf{m}$ , notons  $f(e)$  la face de  $\mathbf{q}$  de degré 4 obtenue dans la discussion précédente. Il reste à remarquer que n'importe quelle nouvelle arête ajoutée relie forcément une arête  $e$  et son successeur. On voit alors aisément que cette arête appartient à la face  $f(e)$ . Ceci a pour conséquence que toutes les faces de  $q$  sont de degré 4 et homéomorphes à un disque. De plus, en coloriant les sommets  $x \in V(\mathbf{q})$  suivant la parité de leur étiquette, nous voyons que  $\mathbf{q}$  est une quadrangulation bipartie.

Démontrons le second point. Soient  $x$  un sommet adjacent à la face  $f_i(\mathbf{m})$  et  $e \in f_i(\mathbf{m})$  une arête issue de  $x$ . Alors, d'après la proposition 3.4, la suite d'arêtes  $e, s(e), s(s(e)), \dots, x$  forme une géodésique de  $f_i(\mathbf{m})$  de longueur  $\mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(x_i)$ , d'où  $d_{\mathbf{q}}(x_i, x) + d_i = \mathbf{l}(x)$ . Considérons ensuite un chemin géodésique d'arêtes de  $\mathbf{q}$  reliant  $x$  à  $x_j$ , avec  $j \neq i$ . Soit  $u \in f_i(\mathbf{m}) \cap f_j(\mathbf{m})$  un sommet visité par cette géodésique. D'après ce qui précède :

$$d_{\mathbf{q}}(x, x_j) + d_j = d_{\mathbf{q}}(x, u) + d_{\mathbf{q}}(u, x_j) + \mathbf{l}(x_j) = d_{\mathbf{q}}(x, u) + \mathbf{l}(u).$$

Or  $d_{\mathbf{q}}(x, u) \geq \mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(u)$ . Donc  $d_{\mathbf{q}}(x, x_j) + d_j \geq \mathbf{l}(x)$ , ce qu'il fallait démontrer.

Pour le troisième point, remarquons que le chemin précédent tourne le plus à gauche possible parmi les arêtes de  $\mathbf{q}$  orientées de sorte que l'étiquetage décroisse selon cette orientation. Compte tenu de la définition 3.5, cela conclut.

Quant au dernier point, pour un sommet  $x \in V(\mathbf{q})$ , nous avons vu que la longueur d'un chemin reliant  $x_i$  à  $x_j$  en passant par  $x$  est de longueur au moins  $2\mathbf{l}(x) - d_i - d_j$ . En particulier, considérons une géodésique entre  $x_i$  et  $x_j$ , et soit  $x$  le deuxième sommet visité par ce chemin de sorte que  $\mathbf{l}(x) = d_i + 1$ . Ainsi,  $d_{\mathbf{q}}(x_i, x_j) \geq 2(d_i + 1) - d_i - d_j > d_i - d_j$ . De même,  $d_{\mathbf{q}}(x_i, x_j) > d_j - d_i$ . Autrement dit,  $|d_i - d_j| < d_{\mathbf{q}}(x_i, x_j)$ . Vérifions finalement que  $d_{\mathbf{q}}(x_i, x_j) + d_i - d_j$  est pair. À cet effet, considérons une bi-coloration des sommets  $\mathbf{q}$  suivant la parité de leur étiquette. De deux choses l'une : si  $x_i$  et  $x_j$  sont de même couleur, alors d'une part  $d_{\mathbf{q}}(x_i, x_j)$  est pair et d'autre part  $\mathbf{l}(x_i) = d_i$  et  $\mathbf{l}(x_j) = d_j$  sont de même parité. Par contre, si les couleurs de  $x_i$  et  $x_j$  diffèrent, alors d'une part  $d_{\mathbf{q}}(x_i, x_j)$  est impair et d'autre part  $d_i$  et  $d_j$  sont de parités différents. Dans tous les cas, le résultat s'ensuit. ■

**Remarque 3.20.** Dans la preuve précédente, nous avons établi que toute arête de  $\mathbf{m}$  est contenue dans une face de  $\mathbf{q}$  et que toute face de  $\mathbf{q}$  contient exactement une arête de  $\mathbf{m}$ .

**Définition 3.21.** La quadrangulation bipartie retardée  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  construite à partir de la carte étiquetée  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) \in \mathbf{LM}_{g,k}^\circ$  sera notée  $\Phi_{g,k}^\circ(\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$ .

**Théorème 3.22.** Soient  $k \geq 1$  et  $g \geq 0$  des entiers. Alors les applications  $\Psi_{g,k}^\circ : \mathbf{Q}_{g,k}^\circ \rightarrow \mathbf{LM}_{g,k}^\circ$  et  $\Phi_{g,k}^\circ : \mathbf{LM}_{g,k}^\circ \rightarrow \mathbf{Q}_{g,k}^\circ$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Si de plus  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) = \Psi_{g,k}^\circ(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

1.  $|F(\mathbf{q})| = |\mathbf{E}(\mathbf{q})| = |\mathbf{E}(\mathbf{m})|$  et pour  $1 \leq i \leq k$  :  $|E_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)| = \deg_{\mathbf{m}}(f_i(\mathbf{m}))$ ,
2.  $|V(\mathbf{q})| = |V(\mathbf{m})| + k$ ,
3. Pour  $1 \leq i \leq k$  et  $d \geq 1$  :

$$|\{e \in E_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D); d_{\mathbf{q}}(e^-, x_i) = d\}| = |\{e \in f_i(\mathbf{m}); \mathbf{l}(e) - \min_{e' \in f_i(\mathbf{m})} \mathbf{l}(e') + 1 = d\}|.$$

Nous démontrons la bijectivité des applications mentionnées, les propriétés qui suivent étant alors des corollaires des résultats précédents.

**Preuve.** Vérifions tout d'abord que  $\Psi_{g,k}^\circ(\Phi_{g,k}^\circ(\mathbf{m}, [\mathbf{l}])) = (\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$ . Ceci découle de la remarque 3.20 et des règles d'ajout d'arêtes expliquées juste après la définition 3.10.

Démontrons ensuite que  $\Phi_{g,k}^\circ(\Psi_{g,k}^\circ(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)) = (\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ . Notons  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) = \Psi_{g,k}^\circ(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ . Nous allons montrer que toute arête de  $\mathbf{q}$  peut être réalisée comme une arête reliant un certain  $e \in E(\mathbf{m})$  à son successeur  $s(e)$ . Il y a  $|E(\mathbf{m})| = 2|\mathbf{E}(\mathbf{m})|$  telles arêtes, quantité qui est aussi égale au nombre d'arêtes de  $\mathbf{q}$  d'après la remarque 3.20. Cela montrera donc que toutes les arêtes de  $\mathbf{q}$  et seulement celles-ci sont reconstituées. Tout d'abord, considérons une arête  $u$  de  $\mathbf{q}$  reliant un sommet  $x$  à  $x_i$  dans  $f_i(\mathbf{m})$ . Dans ce cas,  $u$  est réalisée comme l'arête reliant l'arête  $e \in f_i(\mathbf{m})$  immédiatement à droite de  $u$  à  $s(e) = x_i$ . Raisonnons ensuite par l'absurde et posons :

$$l = \min\{k \geq 0; \text{il existe } e, e' \in f_i(\mathbf{m}) \text{ t.q. } \mathbf{l}(e) = k, e \text{ est relié à } e' \text{ par une arête de } \mathbf{q} \text{ et } s(e) \neq e'\}.$$

D'après ce qui précède,  $l \geq \mathbf{l}(x_i) + 2$ . Choisissons deux arêtes  $e, e' \in f_i(\mathbf{m})$  reliées par une arête de  $\mathbf{q}$  telles que  $s(e) \neq e'$  et  $\mathbf{l}(e) = l$ . Alors il existe deux chemins dans  $\mathbf{q}$  restant dans  $f_i(\mathbf{m})$  et passant respectivement par  $s(e), s^2(e), \dots, x_i$  et  $e', s(e'), \dots, x_i$ . D'autre part  $s(e), s^2(e), \dots$  appartiennent à  $[e, e']$ , alors que  $s(e'), s^2(e'), \dots$  appartiennent à  $[e', e]$  (voir la figure 13). Ainsi, l'arête de  $\mathbf{q}$  qui relie  $e$  à  $e'$  découpe  $f_i(\mathbf{m})$  en deux composantes connexes, chacune contenant  $x_i$ , ce qui est absurde. ■



**Proposition 3.25.** Soient  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D) \in \mathbf{Q}_{g,k}$  et  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) = \Psi_{g,k}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ . Considérons deux sommets  $x, y \in V_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  pour un certain  $i$  avec  $x$  et  $y$  différents de  $x_i$ . Notons  $e_1$  (resp.  $e_2$ ) l'arête de  $f_i(\mathbf{m})$  telle que  $e_1^- = x$  (resp.  $e_2^- = y$ ). Alors :

$$|\mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(y)| \leq d_{\mathbf{q}}(x, y) \leq \mathbf{l}(e_1) + \mathbf{l}(e_2) - 2 \min_{e \in [e_1, e_2]} \mathbf{l}(e) + 2.$$

**Preuve.** La première inégalité provient du fait que pour  $e \in E_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ ,  $\mathbf{l}(e) - \mathbf{l}(x_i) = d_{\mathbf{q}}(e^-, x_i)$ . Ainsi :

$$\mathbf{l}(e_1) = d_{\mathbf{q}}(x, x_i) + \mathbf{l}(x_i) \leq d_{\mathbf{q}}(x, y) + d_{\mathbf{q}}(y, x_i) + \mathbf{l}(x_i) = d_{\mathbf{q}}(x, y) + \mathbf{l}(y),$$

ce qui permet de conclure.

Pour l'autre inégalité, notons  $e$  la dernière arête orientée de  $\mathbf{m}$  dans  $f_i(\mathbf{m})$  parmi la suite  $s^m(e_1)$  ( $m \geq 0$ ) à appartenir à  $[e_1, e_2]$ . Alors  $s(e) = s^{\mathbf{l}(e_2) - \mathbf{l}(e) + 1}(e_2)$ . Il existe donc un chemin d'arêtes (considérées non orientées pour le calcul de la distance) de  $\mathbf{q}$  reliant  $e_1^-$  à  $e_2^-$  de longueur  $(\mathbf{l}(e_1) - \mathbf{l}(e)) + 1 + (\mathbf{l}(e_2) - \mathbf{l}(e)) + 1$ , à savoir :

$$e_1, s(e_1), \dots, e, s(e), s^{\mathbf{l}(e_2) - \mathbf{l}(e)}(e_2), \dots, s(e_2), e_2.$$

■

**Remarque 3.26.** Lorsque  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D) \in \mathbf{Q}_{g,1}$ , c'est-à-dire qu'un seul sommet est distingué, le résultat précédent permet de contrôler  $d_{\mathbf{q}}(x, y)$  pour tous  $x, y \in \mathbf{q}$  car il n'y a alors qu'un seul bassin d'attraction. Ceci sera important lorsque nous monterons la relative compacité évoquée en introduction.

La proposition suivante donne un lien entre géodésiques et étiquettes qui sera fondamental dans la suite. Elle dit que lorsqu'il y a deux bassins d'attractions autour des sommets  $x_1, x_2$ , n'importe quelle géodésique reliant  $x_1$  à  $x_2$  coupe la frontière entre ces deux bassins en un point dont l'étiquette est minimale parmi les étiquettes de cette frontière.

**Proposition 3.27.** Soient  $(\mathbf{q}, (x_1, x_2), D) \in \mathbf{Q}_{g,2}$  et  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) = \Psi_{g,k}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ . Pour  $i = 1, 2$ , notons  $V_i = V_i(\mathbf{q}, (x_1, x_2), D)$ . On identifie  $D = [d_1, d_2]$  avec  $d_2 - d_1$ , qui est un entier appartenant à l'intervalle  $(-d_{\mathbf{q}}(x_1, x_2), d_{\mathbf{q}}(x_1, x_2))$  tel que  $D + d_{\mathbf{q}}(x_1, x_2)$  est pair. Considérons une chaîne géodésique  $\gamma$  entre  $x_1$  et  $x_2$  dans  $\mathbf{q}$ . Alors il existe un unique sommet  $x \in V_1 \cap V_2 \cap \gamma$  vérifiant :

$$\mathbf{l}(x) = \min_{y \in V_1 \cap V_2} \mathbf{l}(y). \quad (4)$$

De plus :

$$d_{\mathbf{q}}(x_1, x_2) = 2 \min_{e \in f_1(\mathbf{m}), \bar{e} \in f_2(\mathbf{m})} \mathbf{l}(e) - \mathbf{l}(x_1) - \mathbf{l}(x_2). \quad (5)$$

**Preuve.** Pour un sommet  $x \in V_1 \cap V_2 \cap \gamma$ , montrons d'abord (4). Soit  $y \in f_1(\mathbf{m}) \cap f_2(\mathbf{m})$ . D'après la propriété 3.8,  $d_{\mathbf{q}}(x_1, y) = \mathbf{l}(y) - \mathbf{l}(x_1)$  et  $d_{\mathbf{q}}(y, x_2) = \mathbf{l}(y) - \mathbf{l}(x_2)$ . Comme  $x \in \gamma$ ,  $d_{\mathbf{q}}(x_1, x) + d_{\mathbf{q}}(x, x_2) = d_{\mathbf{q}}(x_1, x_2)$ . D'où :

$$2\mathbf{l}(y) - \mathbf{l}(x_1) - \mathbf{l}(x_2) = d_{\mathbf{q}}(x_1, y) + d_{\mathbf{q}}(y, x_2) \geq d_{\mathbf{q}}(x_1, x) + d_{\mathbf{q}}(x, x_2) = d_{\mathbf{q}}(x_1, x_2) = 2\mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(x_1) - \mathbf{l}(x_2),$$

d'où le résultat. Cette dernière inégalité démontre également (5).

Par l'absurde, supposons qu'il existe deux sommets distincts  $x, y \in \gamma$  appartenant à  $f_1(\mathbf{m}) \cap f_2(\mathbf{m})$  tels que  $x$  soit visité avant  $y$ . D'après ce qui précède,  $\mathbf{l}(x) = \mathbf{l}(y)$ . Considérons alors le chemin  $\gamma'$  obtenu en concaténant une géodésique entre  $x_1$  et  $y$  avec la continuation du chemin  $\gamma$  issue de  $y$ . D'après la troisième propriété du théorème 3.22,  $d_{\mathbf{q}}(x_1, x) = d_{\mathbf{q}}(x_1, y)$ . Ceci a pour conséquence que  $\gamma'$  est strictement plus court que  $\gamma$ , ce qui contredit le fait que  $\gamma$  est une géodésique. ■

**Remarque 3.28.** En reprenant les notations précédentes, nous avons :

$$d_{\mathbf{q}}(x_1, x) - d_{\mathbf{q}}(x, x_2) = (\mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(x_1)) - (\mathbf{l}(x) - \mathbf{l}(x_2)) = D. \quad (6)$$

Pour conclure cette partie, expliquons pourquoi cette propriété sera importante dans ce qui suit. Comme nous l'avons vu en introduction, dans un espace métrique géodésique  $(E, d)$ , pour montrer que  $x, y \in E$  sont reliés par une unique géodésique, il suffit de montrer que pour tout  $-d(x, y) \leq D \leq d(x, y)$  :

$D_{x,y} := \{z \in E; d(x, z) + D = d(z, y)\}$  et il existe une géodésique  $\gamma$  reliant  $x$  à  $y$  avec  $z \in \gamma$ .

est réduit à un singleton. Dans le cas où  $(E, d)$  est une quadrangulation bipartie  $(\mathbf{q}, d_{\mathbf{q}})$ , d'après ce qui précède, nous avons pour  $x, y \in V(\mathbf{q})$  distincts et  $-d_{\mathbf{q}}(x, y) \leq D \leq d_{\mathbf{q}}(x, y)$  :

$$D_{x,y} = \{z \in V_1 \cap V_2; \mathbf{l}(z) = \min\{\mathbf{l}(y); y \in V_1 \cap V_2\}\},$$

où  $V_1 = V_1((\mathbf{q}, (x, y), D))$  et  $V_2 = V_2((\mathbf{q}, (x, y), D))$ . Il est important de voir que dans ce cas,  $D_{x,y}$  n'est pas forcément réduit à un singleton car il n'y a pas forcément une unique étiquette minimale sur  $V_1 \cap V_2$ . Cependant, nous verrons qu'une étude plus approfondie de  $D_{x,y}$  ainsi que des propriétés de la convergence de Gromov-Hausdorff impliquent que cet ensemble devient un singleton dans l'espace limite, essentiellement parce qu'après renormalisation, les étiquettes le long de  $V_1 \cap V_2$  se comportent comme les valeurs d'un pont Brownien sur  $[0, 1]$ , dont l'infimum est, presque sûrement, atteint une unique fois.

Dans ce qui suit, nous travaillons avec  $\mathbf{LM}_{g,k}$  et introduisons pour un  $k$  général une sorte d'équivalent de l'ensemble  $V_1 \cap V_2$ , appelé « squelette » de la carte étiquetée, que nous codons par des fonctions continues. Puis nous étudions entre autres les limites d'échelle de ces squelettes étiquetés, pour ensuite traduire ces convergences de fonctions en termes de convergence d'espaces métriques.

## 4 Décomposition de cartes aléatoires étiquetées

Nous commençons par voir qu'une carte peut être décomposée en une carte « squelette » sur laquelle viennent se greffer des arbres. Nous voyons ensuite comment cette décomposition se comporte vis-à-vis des étiquettes. L'intérêt est double : d'une part, pour comprendre les limites d'échelles des cartes aléatoires étiquetées, il nous suffira de comprendre les limites d'échelles d'objets a priori plus simples : les squelettes et les arbres (qui viennent ensuite se greffer dessus). D'autre part, lorsqu'il y a deux sommets distingués, les points du squelette appartenant à une géodésique entre ces deux sommets joueront un rôle crucial.

### 4.1 Décomposition de cartes

Soit  $\mathbf{M}_{g,k}$  l'ensemble des cartes enracinées de genre  $g$  à  $k$  faces distinguées. Conformément à ce qui a été dit, nous allons voir que les éléments de  $\mathbf{M}_{g,k}$  sont constitués d'arbres se greffant sur un graphe plongé particulier.

**Définition 4.1.** Soit  $\mathbf{M}_{g,k}^{\geq 2}$  (resp.  $\mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$ ) les cartes de  $\mathbf{M}_{g,k}$  dont les sommets sont tous de degré au moins 2 (resp. 3).

**Remarque 4.2.** Tandis que  $\mathbf{M}_{g,k}^{\geq 2}$  est infini, la formule d'Euler montre que  $\mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$  est fini. En effet, si  $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$ , d'une part  $|V| - |\mathbf{E}| + k = 2 - 2g$  et d'autre part :

$$2|\mathbf{E}| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 3|V|.$$

Ceci impose  $|\mathbf{E}| \leq 3k + 6g - 6$ , avec égalité si, et seulement si, tous les sommets de  $\mathbf{m}$  sont de degré 3.

**Définition 4.3.** On note  $\mathbf{M}_{g,k}^3$  les cartes de  $\mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$  dont tous les sommets sont de degré 3. On définit également  $\mathbf{M}_{0,2}^{\geq 3} = \mathbf{M}_{0,2}^3 = \{\mathbf{m}_0, \mathbf{m}'_0\}$ , où  $\mathbf{m}_0$  (resp.  $\mathbf{m}'_0$ ) est constituée d'une boucle racine orientée délimitant deux faces de degré 1, la première face distinguée étant située à droite (resp. à gauche) de la boucle (bien que d'après la définition précédente  $\mathbf{M}_{0,2}^{\geq 3}$  devrait être vide).

Dans la suite, un élément générique de  $\mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$  sera noté  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{e}_*$  désignera sa racine. La définition suivante introduit deux opérations sur les cartes  $\mathbf{M}_{g,k}$  consistant grossièrement à prendre le plus grand sous-graphe appartenant à  $\mathbf{M}_{g,k}^{\geq 2}$  (resp.  $\mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$ ).

**Définition 4.4.** Notons  $\pi_2 : \mathbf{M}_{g,k} \rightarrow \mathbf{M}_{g,k}^{\geq 2}$  l'application qui à une carte  $\mathbf{m}$  associe la carte  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  obtenue en effaçant une à une toutes les arêtes de  $\mathbf{m}$  incidentes à un sommet de degré 1 jusqu'à ce qu'il n'en reste plus. Le résultat ne dépend pas de l'ordre d'effacement des arêtes. Ainsi,  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  est une carte de genre  $g$  à  $k$  faces et sans sommets de degré 1. Si  $e_*$  est la racine de  $\mathbf{m}$ , nous enracinons  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  par le premier élément de la suite  $\phi_{\mathbf{m}}^i(e)$  ( $i \geq 0$ ) appartenant à  $E(\mathbf{m}^{\geq 2})$ . Ainsi,  $\mathbf{m}^{\geq 2} \in \mathbf{M}_{g,k}^{\geq 2}$ .

De même, pour  $(g, k) \neq (0, 2)$ , notons  $\pi_3 : \mathbf{M}_{g,k} \rightarrow \mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$  l'application qui à une carte  $\mathbf{m}$  associe la carte  $\mathbf{m}^{\geq 3}$  obtenue à partir de  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  en enlevant les sommets de degré 2. Plus précisément, si  $e_1, \dots, e_r$  est une chaîne d'arêtes de  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  tels que d'une part tous les sommets  $e_2^-, \dots, e_r^-$  sont de degré 2 et d'autre part  $e_1^-$  et  $e_r^+$  sont de degré au moins 3, nous remplaçons les arêtes et sommets constituant cette chaîne par une unique arête reliant  $e_1^-$  et  $e_r^+$ , notée  $e_1 \cdots e_r$ . Nous enracinons

le graphe obtenu par l'arête  $\epsilon_* = e_1 \cdots e_s$  définie par le fait que la racine de  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  appartient à  $\{e_1, \dots, e_s\}$ . Cette opération fournit manifestement une carte de genre  $g$ , notée  $\mathbf{m}^{\geq 3}$ , et dont tous les sommets sont de degré au moins 3.

Lorsque  $(g, k) = (0, 2)$ , pour  $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{0,2}$ , on voit que  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  est un cycle  $(e_1, \dots, e_r)$  que nous concaténons en  $\mathbf{m}_0$  ou  $\mathbf{m}'_0$  pour obtenir  $\mathbf{m}^{\geq 3}$ .

Remarquons que  $(\mathbf{m}^{\geq 2})^{\geq 3} = \mathbf{m}^{\geq 3}$ ,  $V(\mathbf{m}^{\geq 3}) \subset V(\mathbf{m}^{\geq 2}) \subset V(\mathbf{m})$  et  $E(\mathbf{m}^{\geq 2}) \subset E(\mathbf{m})$ ; voir la figure 14.

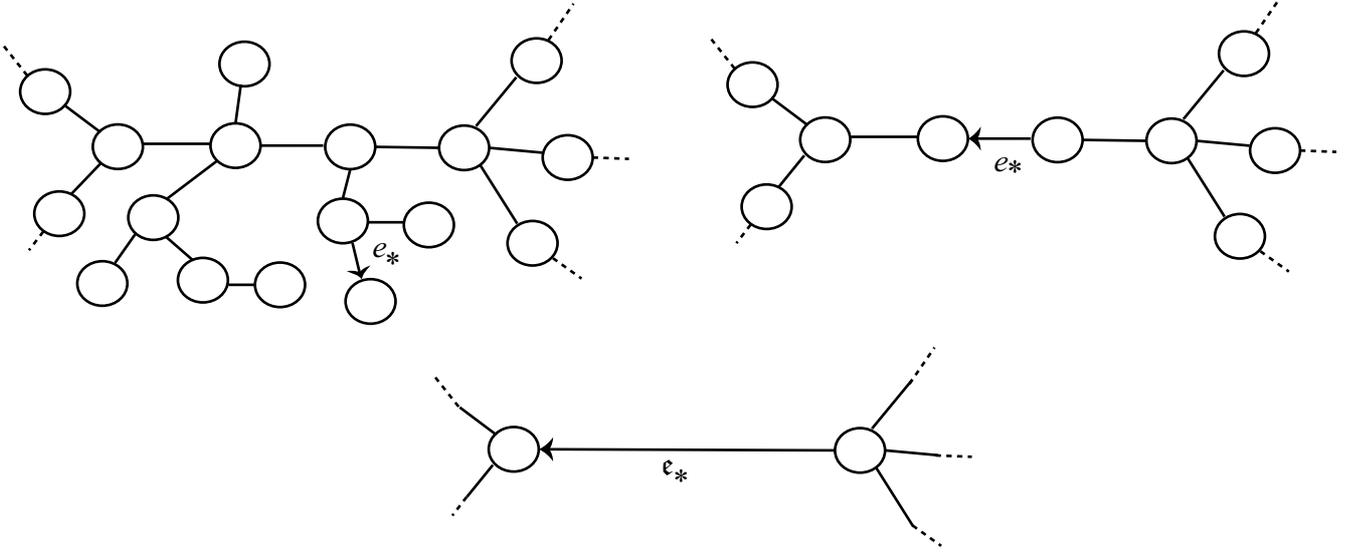


FIG. 14 – Nous avons successivement représenté une partie d'une carte  $\mathbf{m}$  (en genre  $g \geq 1$ ), puis les parties associées de  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  et de  $\mathbf{m}^{\geq 3}$ .

Intéressons-nous d'abord au cas où  $(g, k) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$ . Nous codons maintenant les différents arbres qui se greffent sur  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  par des fonctions continues, ce qui motive la définition suivante.

**Définition 4.5.** Un *chemin* est une fonction continue réelle  $(w(s), 0 \leq s \leq \tau(w))$  telle que  $w(0) = 0$ . Le réel positif  $\tau(w)$  est appelé la *durée* du chemin et  $\hat{w} = w(\tau(w))$  sa valeur finale. Le chemin  $\bar{w} = w(\tau(w) - \cdot) - \hat{w}$  est appelé *chemin inverse* de  $w$ . Notons  $\mathcal{W}$  l'ensemble des chemins. Pour  $w, w' \in \mathcal{W}$ ,  $ww'$  désignera le chemin concaténé défini de manière naturelle à partir de  $w$  et  $w'$ . Munissons  $\mathcal{W}$  que nous munissons de la distance :

$$d(w, w') = \left( \sup_{s \geq 0} |w(s \wedge \tau(w)) - w'(s \wedge \tau(w'))| \right) \vee |\tau(w) - \tau(w')|.$$

Il est aisé de voir que  $(\mathcal{W}, d)$  est un espace polonais, c'est-à-dire un espace métrique complet séparable. Remarquons également que  $\tau : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est continue.

**Définition 4.6.** Fixons  $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{g,k}$  et notons  $\mathbf{m} = \mathbf{m}^{\geq 3}$ . Soit  $\epsilon \in E(\mathbf{m})$ , que nous écrivons :

$$\epsilon = e_1 \cdots e_{r_\epsilon},$$

de sorte que que  $r_\epsilon$  désigne le nombre de sommets de degré 2 qui ont été effacés lors du passage de  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  à  $\mathbf{m}^{\geq 3}$  pour obtenir  $\epsilon$ .

**Remarque 4.7.** Pour  $\mathbf{e} \in \mathbf{m}$ ,  $r_{\mathbf{e}} = r_{\bar{\mathbf{e}}}$ . Dans la suite, si  $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}\}$ ,  $r(\mathbf{e})$  désignera cette quantité.

Pour reconstituer la partie de  $\mathbf{m}$  qui, après effacements, donne  $\mathbf{e}$ , il suffit donc de se donner la collection d'arbres qui se greffent successivement sur  $e_1, \dots, e_{r_{\mathbf{e}}}$ , ce qui, comme nous allons le voir, revient à se donner une concaténation de  $r_{\mathbf{e}}$  chemins de Dyck obtenus comme fonctions de contour de ces différents arbres.

**Définition 4.8.** Un *chemin de Dyck* est une fonction continue  $c \in \mathcal{W}$ , affine par morceaux de pente  $\pm 1$ , telle que  $c(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$  et telle que  $c$  atteigne la valeur  $-1$  pour la première fois en  $\tau(c)$  (voir la figure 15).

**Définition 4.9.** Considérons les arêtes orientées  $e \in E(\mathbf{m})$  telles que le premier élément de la suite  $\phi_{\mathbf{m}}^i(e)$  ( $i \geq 0$ ) appartenant à  $E(\mathbf{m}^{\geq 2})$  appartienne également à  $\{e_1, \dots, e_{r_{\mathbf{e}}}\}$  (ces arêtes constituent les arbres qui viennent se greffer sur  $\{e_1, \dots, e_{r_{\mathbf{e}}}\}$ ). Notons  $\tau^{\mathbf{e}}$  leur nombre et remarquons que celles-ci forment un intervalle, dont la première arête sera notée  $\mathbf{e}(0)$ . Pour  $0 \leq i \leq \tau^{\mathbf{e}} - 1$ , notons :

$$\mathbf{e}(i) = \phi_{\mathbf{m}}^i(\mathbf{e}(0)). \quad (7)$$

Définissons  $\underline{c}^{\mathbf{e}}(\tau^{\mathbf{e}}) = r_{\mathbf{e}}$  et pour  $0 \leq i \leq \tau^{\mathbf{e}} - 1$  :

$$\underline{c}^{\mathbf{e}}(i) = |\{j; e_j \in [\mathbf{e}(0), \mathbf{e}(i)]\}|,$$

de sorte que  $\underline{c}^{\mathbf{e}}(i)$  représente le nombre d'arbres explorés avant l'instant  $i$ . La fonction de contour associée est définie par :

$$\begin{cases} c^{\mathbf{e}}(i) = d_{\mathbf{m}}(\mathbf{e}(i)^-, V(\mathbf{m}^{\geq 2})) - \underline{c}^{\mathbf{e}}(i) & \text{si } 0 \leq i \leq \tau^{\mathbf{e}} - 1 \\ c^{\mathbf{e}}(\tau^{\mathbf{e}}) = -r_{\mathbf{e}}. \end{cases}$$

Prolongeons  $c^{\mathbf{e}}$  et  $\underline{c}^{\mathbf{e}}$  en fonctions continues par interpolation linéaire. Ainsi,  $c^{\mathbf{e}}$  est la concaténation de  $r_{\mathbf{e}}$  chemins de Dyck (voir la figure 15).

Si  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_*$  est la racine de  $\mathbf{m}$ , la position de la racine de  $\mathbf{m}$  est déterminée par un entier  $t^* \in [0, \tau^{\mathbf{e}_*})$ .

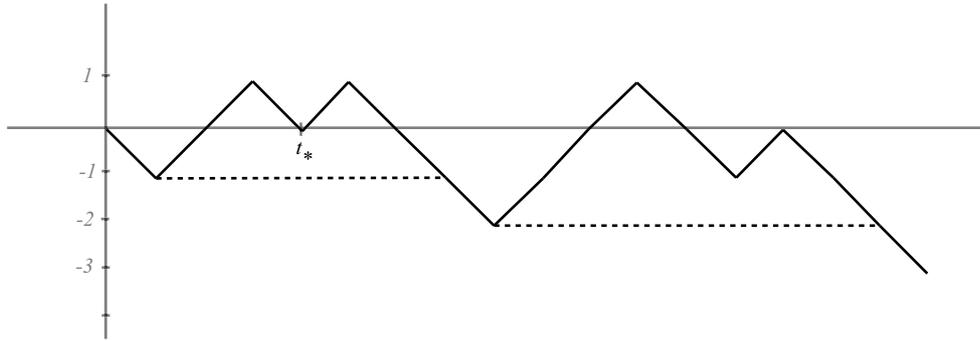


FIG. 15 – Concaténation de 3 chemins de Dyck codant les arbres qui se greffent sur l'arête  $\mathbf{e}_*$  de la figure 14. Le processus dessiné en pointillés correspond à  $-\underline{c}^{\mathbf{e}}$ , c'est-à-dire à l'opposé du nombre d'arbres déjà explorés.

Ainsi :

**Proposition 4.10.** Lorsque  $(g, k) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$ , une carte  $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{g,k}$  est entièrement décrite par la donnée de sa projection  $\mathbf{m} = \mathbf{m}^{\geq 3}$ , d'une famille  $(c^\epsilon, \epsilon \in E(\mathbf{m})) \in \mathcal{W}^{E(\mathbf{m})}$  telle que  $c^\epsilon$  est la concaténation de  $r_\epsilon$  chemins de Dyck et d'un entier  $t^* \in [0, \tau^{\epsilon^*})$ .

Traïtons finalement les cas particuliers  $(g, k) \in \{(0, 1), (0, 2)\}$ .

**Proposition 4.11.** Lorsque  $(g, k) = (0, 1)$ , une carte de  $\mathbf{M}_{0,1}$  est par définition un arbre planaire enraciné avec au moins une arête, qui est donc décrite par la donnée d'un chemin de Dyck  $c$  de longueur  $\tau(c) > 1$ .

Lorsque  $(g, k) = (0, 2)$ , la construction de  $\mathbf{m}^{\geq 3}$  à partir de  $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{0,2}$  montre que la racine de  $\mathbf{m}^{\geq 3}$  peut provenir de n'importe quel arête du cycle  $\mathbf{m}^{\geq 2}$ . Pour lever cette ambiguïté, nous procédons comme suit.

**Proposition 4.12.** Une carte  $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{0,2}$  peut être définie de manière univoque par sa projection  $\mathbf{m}^{\geq 3}$ , un chemin de Dyck  $c$ , un entier  $t^* \in [0, \tau(c))$  et deux chemins  $c^{\epsilon^*}, c^{\bar{\epsilon}^*}$  qui sont respectivement la concaténation de  $r_{\epsilon^*}-1$  et de  $r_{\bar{\epsilon}^*}$  chemins de Dyck.

**Preuve.** À partir des données précédentes, nous reconstituons  $\mathbf{m}$  comme suit à partir d'un cycle  $e_1 \cdots e_{\epsilon^*}$ . On greffe d'abord l'arbre codé par  $c$  à droite du sommet  $e_1^-$  et l'enracinons en conséquence grâce à  $t^*$ , puis des arbres à droite des sommets  $e_2^-, \dots, e_{r^*}^-$  selon la forêt codée par  $c^{\epsilon^*}$  et finalement des arbres à droite des sommets  $\bar{e}_1^-, \dots, \bar{e}_{\bar{\epsilon}^*}^-$  selon la forêt codée par  $c^{\bar{\epsilon}^*}$ . ■

Nous avons donc décomposé la structure de  $\mathbf{M}_{g,k}$  en structures a priori plus simples. Il nous reste à voir comment garder trace des étiquettes.

## 4.2 Décomposition de cartes étiquetées

**Définition 4.13.** Soit  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) \in \mathbf{LM}_{g,k}$  et notons  $\mathbf{m} = \mathbf{m}^{\geq 3}$ . Comme  $V(\mathbf{m}) \subset V(\mathbf{m})$ ,  $[\mathbf{l}]$  induit naturellement une classe d'étiquetages sur  $\mathbf{m}$ . Sauf mention explicite du contraire, nous noterons  $\mathbf{l} \in [\mathbf{l}]$  l'étiquetage de  $\mathbf{m}$  tel que  $\mathbf{l}(\epsilon_*^-) = 0$ .

Ce qui suit définit un étiquetage des arbres qui se greffent sur une arête  $\epsilon$ .

**Définition 4.14.** Pour  $\epsilon \in E(\mathbf{m})$ , notons  $l^\epsilon$  la fonction d'étiquetage définie par  $l_{\tau^\epsilon}^\epsilon = \mathbf{l}(\epsilon(\tau^\epsilon - 1)^+) - \mathbf{l}(\epsilon(0))$  et, pour  $0 \leq i < \tau^\epsilon$  :

$$l_i^\epsilon = \mathbf{l}(\epsilon(i)) - \mathbf{l}(\epsilon(0)),$$

où, comme dans (7),  $\epsilon(0), \epsilon(1), \dots$  sont les arêtes de  $\mathbf{m}$  constituant les arbres qui se recollent sur  $\epsilon$ . Par interpolation linéaire, nous prolongeons  $l^\epsilon$  en une fonction continue, affine par morceaux de pentes  $-1, 0$  ou  $1$ , nulle en  $0$  et de même durée que  $c^\epsilon$ .

**Remarque 4.15.** Lorsque  $(\mathbf{q}, x) \in \mathbf{Q}_{g,1}$  (ici,  $k = 1$ ) et  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) = \Psi_{g,1}(\mathbf{q}, x, D)$ , nous pouvons reconstituer les étiquettes de  $\mathbf{q}$  à partir des processus  $l^\epsilon$  définis précédemment. En effet, comme  $\mathbf{m}$  possède une unique face, la suite  $(\phi_{\mathbf{m}}^i(\epsilon_*))_i$  contient toutes les arêtes de  $\mathbf{m}$ . On vérifie alors que pour tout  $i$  :

$$\mathbf{l}(\phi_{\mathbf{m}}^i(\epsilon_*(0))) = J^{\epsilon_*} J^{\phi_{\mathbf{m}}(\epsilon_*)} \dots J^{\phi_{\mathbf{m}}^{\deg_{\mathbf{m}}(\epsilon_*)-1}(\epsilon_*)}(i),$$

où le produit

Nous allons décomposer  $\mathbf{l}$  en différents processus, qui seront étudiés séparément, mais qui reconstituent  $\mathbf{l}$ . Remarquons que la connaissance de la fonction de contour de  $c^\epsilon$  impose certaines restrictions sur  $l^\epsilon$ , ce qui motive la définition suivante.

**Définition 4.16.** Le couple  $(c, z) \in \mathcal{W}^2$  est appelé *serpent discret* à  $r$  arbres si :

1.  $c$  est la concaténation de  $r$  chemins de Dyck
2.  $z$  vérifie  $z(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ , est linéaire de pente  $-1, 0$  ou  $1$  entre temps entiers consécutifs, vérifie  $\tau(z) = \tau(c)$  et  $z(i) = z(j)$  dès que :

$$c(i) = c(j) = \min_{i \wedge j \leq k \leq i \vee j} c(k),$$

ce qui signifie que  $i$  et  $j$  sont des instants où le processus d'exploration  $c$  visite le même sommet.

3.  $z(i) = 0$  lorsque  $i$  est un temps entier où  $c$  atteint un nouveau minimum (ce qui signifie qu'à l'instant  $i$  le processus d'exploration se trouve à la racine d'un arbre greffé sur  $\mathbf{m}$ ).

On note  $\mathbf{S}_r$  l'ensemble des serpents discrets à  $r$  arbres.

La propriété suivante est alors immédiate.

**Proposition 4.17.** Soient  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) \in \mathbf{LM}_{g,k}$  et  $\epsilon \in E(\mathbf{m})$  de la forme  $\epsilon = e_1 \cdots e_{r_\epsilon}$ . Pour  $0 \leq i \leq \tau^\epsilon$ , soit  $m$  l'entier tel que  $\epsilon(i) \in (e_{m-1}, e_m]$  (voir (7) pour la définition de  $\epsilon(i)$ ) et posons :

$$z^\epsilon(i) = \mathbf{l}(\epsilon(i)) - \mathbf{l}(e_m).$$

Nous prolongeons  $z^\epsilon$  par interpolation linéaire. Ainsi,  $z^\epsilon$  correspond aux étiquettes de la forêt se greffant sur  $\epsilon$ , translatées pour que l'étiquette de la racine de chaque arbre soit nulle. Alors  $(c^\epsilon, z^\epsilon)$  est un serpent discret à  $r_\epsilon$  arbres.

Nous procédons maintenant à un étiquetage des sommets de  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  qui n'apparaissent pas dans  $\mathbf{m}^{\geq 3}$ . Notons qu'un étiquetage d'une arête détermine celui de son opposée, ce qui motive la définition suivante.

**Définition 4.18.** Une *marche* est une fonction  $w \in \mathcal{W}$  telle que  $w(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ ,  $\tau(w) \geq 1$  et, pour  $1 \leq i \leq \tau(w)$ ,  $|w(i) - w(i-1)| \leq 1$ . On note  $\mathbf{W}$  l'ensemble des marches et  $W_{0 \rightarrow x}$  l'ensemble des marches de valeur finale  $\widehat{w} = x$ .

Un *potentiel* sur  $\mathbf{m}$  est une application  $\theta : E(\mathbf{m}) \rightarrow \mathbb{R}$  telle qu'il existe une application  $\mathbf{u} : V(\mathbf{m}) \rightarrow \mathbb{R}$  de sorte que  $\mathbf{u}(\epsilon_\star^-) = 0$  et pour tout  $\epsilon \in E(\mathbf{m})$  :

$$\theta(\epsilon) = \mathbf{u}(\epsilon^+) - \mathbf{u}(\epsilon^-).$$

Un *réseau de marches* sur  $\mathbf{m}$  est une famille  $(w^\epsilon, \epsilon \in E(\mathbf{m})) \in \mathbf{W}^{E(\mathbf{m})}$  telle que pour tout  $\epsilon \in E(\mathbf{m})$ ,  $r_\epsilon = \tau(w^\epsilon) = \tau(w^{\bar{\epsilon}})$  et pour  $0 \leq t \leq r_\epsilon$  :

$$w^{\bar{\epsilon}}(t) = w^\epsilon(r_\epsilon - t) - \widehat{w}^\epsilon,$$

et telle que  $\theta = \widehat{w} = (\widehat{w}^\epsilon, \epsilon \in E(\mathbf{m}))$  soit un potentiel. L'ensemble des réseaux de marches sur  $\mathbf{m}$  sera noté  $\mathbf{WN}_\mathbf{m}$ .

L'intérêt de cette définition provient de la propriété suivante.

**Proposition 4.19.** Pour  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) \in \mathbf{LM}_{g,k}$ , définissons pour chaque  $\mathbf{e} \in E(\mathbf{m})$  de la forme  $\mathbf{e} = e_1 \cdots e_{r_{\mathbf{e}}}$  :

$$w^{\mathbf{e}}(i) = \mathbf{l}(e_{i+1}^-) - \mathbf{l}(e_1^-) \quad 0 \leq i \leq r_{\mathbf{e}} - 1$$

et  $w^{\mathbf{e}}(r_{\mathbf{e}}) = \mathbf{l}(e_{r_{\mathbf{e}}}^-) - \mathbf{l}(e_1^-)$ . Alors  $w^{\mathbf{e}}$  est une marche de durée  $r_{\mathbf{e}}$  et  $(\widehat{w}^{\mathbf{e}}, \mathbf{e} \in E(\mathbf{m}))$  est un potentiel.

La proposition suivante précise le lien entre  $\mathbf{l}$  et les processus introduits précédemment.

**Proposition 4.20.** Pour  $0 \leq i \leq \tau^{\mathbf{e}}$ , nous avons :

$$l^{\mathbf{e}}(i) = z^{\mathbf{e}}(i) + w^{\mathbf{e}}(\underline{c}^{\mathbf{e}}(i)).$$

L'étude précédente nous donne en conclusion les décompositions suivantes.

**Proposition 4.21.** (i) Soit  $(g, k) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$ . Alors  $\mathbf{LM}_{g,k}$  est en bijection avec l'ensemble  $\mathbf{C}_{g,k}^{\text{map}}$  des éléments :

$$(\mathbf{m}, (w, c, z), t^*) \in \mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3} \times (\mathcal{W}^{E(\mathbf{m})})^3 \times \mathbb{N}$$

avec :

1.  $(w^{\mathbf{e}}, \mathbf{e} \in E(\mathbf{m})) \in \mathbf{WN}_{\mathbf{m}}$ ,
  2. pour tous  $\mathbf{e} \in E(\mathbf{m})$ ,  $(c^{\mathbf{e}}, z^{\mathbf{e}}) \in \mathbf{S}_{r_{\mathbf{e}}}$  avec  $r_{\mathbf{e}} = \tau(w^{\mathbf{e}})$ ,
  3.  $t^* \in [0, \tau(c^{\mathbf{e}^*})]$  est un entier (permettant d'enraciner  $\mathbf{m}$ )
- (ii) L'ensemble  $\mathbf{LM}_{0,1}$  est en bijection avec l'ensemble  $\mathbf{C}_{0,1}^{\text{map}} = \{(c, z) \in \mathbf{S}_1; \tau(c) > 1\}$ ,
- (iii) L'ensemble  $\mathbf{LM}_{0,2}$  est en bijection avec l'ensemble  $\mathbf{C}_{0,2}^{\text{map}}$  des éléments :

$$(\mathbf{m}, (w^{\mathbf{e}^*}, w^{\bar{\mathbf{e}^*}}, c, z, c^{\mathbf{e}^*}, c^{\bar{\mathbf{e}^*}}, z^{\mathbf{e}^*}, z^{\bar{\mathbf{e}^*}}), t^*) \in M_{0,2 \geq 3} \times \mathcal{W}^8 \times \mathbb{N}$$

avec :

1.  $(w^{\mathbf{e}^*}) \in \mathbf{W}_{0 \rightarrow 0}$  et  $w^{\bar{\mathbf{e}^*}} = \bar{w}^{\mathbf{e}^*}$ ,
2.  $(c, z) \in S_1$  et  $t^* \in [0, \tau(c)]$  est un entier,
3.  $(c^{\mathbf{e}^*}, z^{\mathbf{e}^*}) \in \mathbf{S}_{r_{\mathbf{e}^*}-1}$  et  $(c^{\bar{\mathbf{e}^*}}, z^{\bar{\mathbf{e}^*}}) \in \mathbf{S}_{r_{\bar{\mathbf{e}^*}}-1}$ .

**Remarque 4.22.** Ainsi,  $w^{\mathbf{e}}$  code les étiquettes des sommets de  $m^{\geq 2}$  se « situant » sur  $\mathbf{e}$ , le serpent discret  $(c^{\mathbf{e}}, z^{\mathbf{e}})$  code les arbres étiquetés de  $\mathbf{m}$  se greffant sur l'arête  $\mathbf{e}$  et  $t^*$  permet d'enraciner  $\mathbf{m}$  comme expliqué auparavant.

**Définition 4.23.** Lorsque  $(g, k) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$  et  $(\mathbf{m}, (w, c, z), t^*) \in \mathbf{C}_{g,k}^{\text{map}}$  code  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$ , nous noterons :

$$\mathbf{l} = (w, c, z), \quad \mathbf{l}^{\mathbf{e}} = (w^{\mathbf{e}}, c^{\mathbf{e}}, z^{\mathbf{e}}), \quad r_{\mathbf{e}} = \tau(w^{\mathbf{e}}), \quad t^{\mathbf{e}} = \tau(c^{\mathbf{e}}), \quad \tau_{\mathbf{l}} = \sum_{\mathbf{e} \in E(\mathbf{m})} \tau^{\mathbf{e}},$$

de sorte que  $r_{\mathbf{e}}$  correspond au nombre de sommets de degré 2 qui ont été effacés sur  $\mathbf{e}$ ,  $\tau^{\mathbf{e}}$  au nombre d'arêtes orientées de la forêt codée par  $c^{\mathbf{e}}$  et  $\tau_{\mathbf{l}}$  le nombre total d'arêtes orientées de  $\mathbf{m}$ .

**Définition 4.24.** Plus généralement, on définit l'ensemble  $\mathbf{C}_{g,k}$  par :

$$\mathbf{C}_{g,k} = \{(\mathbf{m}, (w, c, z), t^*); \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}, (w, c, z) \in (\mathcal{W}^3)^{E(\mathbf{m})}, 0 \leq t^* \leq \tau^{\mathbf{e}_*}\},$$

où  $\tau^{\mathbf{e}} = \tau(c^{\mathbf{e}})$ . On notera  $r_{\mathbf{e}} = \tau(w^{\mathbf{e}})$ . On munit  $\mathbf{C}_{g,k}$  de la topologie produit (grâce à la finitude de  $\mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$ ) qui en fait un espace métrique complet séparable.

Pour conclure cette partie, donnons un exemple d'application des décompositions qui précèdent. Plus précisément, dans le cas  $k = 1$ , nous montrons que le nombre de boules nécessaires pour recouvrir une quadrangulation est relié au module de continuité du processus des étiquettes obtenu à partir de sa carte à une face associée.

Pour un espace métrique  $X$ , notons  $N(X, \epsilon)$  le nombre minimal de boules ouvertes de rayon au plus  $\epsilon$  nécessaires pour recouvrir  $X$ .

**Définition 4.25.** Pour une application  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  où  $I$  est un intervalle, on note pour  $\epsilon > 0$  :

$$\omega(u, \epsilon) = \sup_{x, y \in I, |x-y| < \epsilon} |u(x) - u(y)|,$$

qu'on appelle module de continuité de  $u$ .

**Lemme 4.26.** Soit  $(\mathbf{q}, x) \in \mathbf{Q}_{g,1}$  et notons  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) = \Psi_{g,1}(\mathbf{q}, x, D)$ ,  $(\mathbf{m}, (w, c, z), t^*) = \tilde{\Psi}_{g,1}(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ . Définissons (voir remarque 4.15) :

$$l = l^{\mathbf{e}_*} l^{\phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{e}_*)} \dots l^{\phi_{\mathbf{m}}^{\deg_{\mathbf{m}}(\mathbf{e}_*)-1}(\mathbf{e}_*)}.$$

Alors, pour  $R > 4$  :

$$\{N(X_{\mathbf{q}}, R) > N + 1\} \subset \left\{ \omega(l, \left\lceil \frac{\tau_l}{N} \right\rceil) \geq R/2 \right\}.$$

**Preuve.** Comme la carte  $\mathbf{m}$  possède une unique face de degré  $\tau_l$ , toutes ses arêtes orientées sont de la forme  $e(i) = \phi_{\mathbf{m}}^i(\mathbf{e}_*(0))$  pour un entier  $i \in [0, \tau_l)$ . Découpons l'intervalle  $[0, \tau_l]$  en  $N$  intervalles, notés  $I_1, \dots, I_N$  de longueur au plus  $\lceil \tau_l/N \rceil$ . D'après la proposition 3.25, si  $\omega(l, \lceil \tau_l/N \rceil) < R/2 - 1$ , alors tous les sommets de  $\mathbf{q}$  de la forme  $e(i)^-$  pour  $i \in I_j$  sont à distance au plus  $R$ . Il suffit donc de  $N$  boules pour recouvrir tous les sommets de  $\mathbf{q}$  sauf éventuellement son sommet distingué, d'où le résultat. ■

Ce lemme sera important pour montrer la tension d'une suite de variables aléatoires : il faudra contrôler  $N(X_{\mathbf{q}}, R)$  afin d'appliquer un critère de compacité, ce qu'on fera en contrôlant le module de continuité de  $l$  grâce à l'étude de sa limite d'échelle qu'on met en œuvre dans la section qui suit.

## 5 Identification des limites d'échelle de cartes aléatoires étiquetées

Comme en introduction, définissons la mesure  $\mathbf{Q}_{g,k}$  sur l'ensemble  $\mathbf{Q}_{g,k}$  des quadrangulations biparties retardées à  $k$  sommets distingués. Nous avons vu que  $\mathbf{Q}_{g,k}$  était en bijection avec l'ensemble  $\mathbf{LM}_{g,k}$  des cartes étiquetées à  $k$  faces. En notant  $\mathbf{LM}_{g,k}$  la mesure image sur  $\mathbf{LM}_{g,k}$  définie par cette bijection, notre dessein est d'étudier le comportement de cette mesure sous changements d'échelle. Plus précisément, pour  $a > 0$ , nous définissons (définition 5.19) un opérateur de changement d'échelle  $\xi^a$  sur  $\mathbf{LM}_{g,k}$  et, pour une application continue  $H$  sur  $\mathbf{C}_{g,k}$ , nous souhaitons étudier la convergence de  $\mathbf{LM}_{g,k}(H \circ \xi^a)$  lorsque  $a \rightarrow +\infty$ .

À cet effet, nous commençons par définir les différentes mesures images mises en jeu (section 5.1) pour ensuite étudier les limites d'échelle des réseaux de marches (sections 5.2 et 5.3) ainsi que celles des fonctions de contour et étiquettes  $(c, z)$  (section 5.4). En utilisant ces résultats intermédiaires, nous achevons finalement l'étude de la convergence de  $\mathbf{LM}_{g,k}(H \circ \xi^a)$  lorsque  $a \rightarrow +\infty$  (sections 5.5 et 5.6).

Cette partie étant relativement technique, nous nous contentons de donner les idées sous-jacentes amenant au théorème 5.20 et renvoyons le lecteur à l'article de Miermont [10] pour les détails.

### 5.1 Mesures discrètes

Nous étudions les mesures images de  $\mathbf{Q}_{g,k}$  obtenues par les applications précédentes. Supposons d'abord que  $(g, k) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$ .

**Définition 5.1.** Soit  $\mathbf{Q}_{g,k}$  la mesure  $\sigma$ -finie définie sur  $\mathbf{Q}_{g,k}$  associant à chaque  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D) \in \mathbf{Q}_{g,k}$  le réel  $12^{-|F(\mathbf{q})|}$ .

**Proposition 5.2.** La mesure image de  $\mathbf{Q}_{g,k}$  par  $\Psi_{g,k}$  est la mesure définie sur  $\mathbf{LM}_{g,k}$  associant à chaque  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$  le réel  $2 \cdot 12^{-|\mathbf{E}(\mathbf{m})|}$ .

**Preuve.** C'est une conséquence du théorème 3.22 et de la proposition 3.24. ■

**Définition 5.3.** Notons  $\tilde{\Psi}_{g,k} : \mathbf{Q}_{g,k} \rightarrow \mathbf{C}_{g,k}^{\text{map}}$  l'application qui à  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  associe l'élément de  $\mathbf{C}_{g,k}^{\text{map}}$  associé à  $\Psi_{g,k}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$  par l'application de la proposition 4.21. La mesure image de  $\mathbf{Q}_{g,k}$  par  $\tilde{\Psi}_{g,k}$  est notée  $\mathbf{LM}_{g,k}$ .

**Proposition 5.4.** La mesure de chaque élément  $(\mathbf{m}, (w, c, z), t^*) \in \mathbf{C}_{g,k}^{\text{map}}$  relativement à  $\mathbf{LM}_{g,k}$  vaut  $2 \cdot 12^{-\tau_l/2}$ . De plus, lorsque  $(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ ,  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$  et  $(\mathbf{m}, \mathbf{l}, t^*)$  sont associés par nos bijections, nous avons :

$$\tau_l/2 = |\mathbf{E}(\mathbf{m})| = |F(\mathbf{q})| = V_{\mathbf{q}} - \chi(g).$$

**Preuve.** Ceci découle des différentes constructions, du théorème 3.22 et des propositions 3.24 et 4.21. ■

**Proposition 5.5.** La mesure  $\mathbf{LM}_{g,k}$  peut être écrite sous la forme :

$$\mathbf{LM}_{g,k} = 2 \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}} \mathbf{LM}_{\mathbf{m}},$$

où :

$$\text{LM}_m = \delta_m \text{WN}_m(d(w^\epsilon)_{\epsilon \in E(m)}) \bigotimes_{\epsilon \in E(m)} \text{DS}_{\tau(w^\epsilon)}(d(c^\epsilon, z^\epsilon))_{\#_{\tau(c^{\epsilon^*})}}(dt^*)$$

et :

- $\text{WN}_m(d(w^\epsilon))$  est la mesure qui associe à chaque réseau de marches  $(w^\epsilon) \in \mathbf{WN}_m$  le poids  $3^{-\sum_{\epsilon \in E(m)} r_\epsilon}$ ,
- $\text{DS}_r$  est la mesure qui associe à chaque serpent discret  $(c, z) \in \mathbf{S}_r$  le poids  $2^{-\tau(c)} 3^{-(\tau(c)-r)/2}$ .
- $\#_{\tau(c^{\epsilon^*})}$  est la mesure de comptage sur l'ensemble  $\{0, \dots, \tau(c^{\epsilon^*} - 1)\}$ .

De plus,  $\text{DS}_r$  est une mesure de probabilité sous laquelle les  $r$  arbres codés par  $c$  suivent indépendamment une loi de Galton-Watson de paramètre  $1/2$  et, conditionnellement à  $c$ , les étiquettes sont choisies uniformément au hasard parmi celles qui sont autorisées.

**Preuve.** Il suffit de remarquer que :

$$3^{-\sum_{\epsilon \in E(m)} r_\epsilon} \prod_{\epsilon \in E(m)} 2^{-\tau(c^\epsilon)} 3^{-\frac{(\tau(c^\epsilon)-r_\epsilon)}{2}} = 12^{-\frac{\sum_{\epsilon \in E(m)} \tau(c^\epsilon)}{2}} = 12^{-\pi/2}.$$

■

**Définition 5.6.** Soit  $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$ . Notons  $\widehat{\text{WN}}_m$  la mesure image de  $\text{WN}_m$  par l'application suivante, qui intuitivement consiste à oublier les étiquettes des sommets de  $\mathbf{m}^{\geq 2} \setminus \mathbf{m}^{\geq 3}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{WN}_m &\rightarrow \mathbb{N}^{\mathbf{E}(m)} \times \mathbb{Z}^{E(m)} \\ (w^\epsilon, \epsilon \in E(m)) &\mapsto ((r_\epsilon, \epsilon \in \mathbf{E}(m)), (\widehat{w}^\epsilon, \epsilon \in E(m))), \end{aligned}$$

## 5.2 Étude des limite d'échelle de $\widehat{\text{WN}}_m$

Nous fixons ici  $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{g,k}^{\geq 3}$  et notons  $V = V(\mathbf{m})$ ,  $E = E(\mathbf{m})$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{m})$ ,  $v_* = \epsilon_*^-$ .

**Définition 5.7.** Soit  $l(V)$  (resp.  $l(E)$ ) l'espace vectoriel des applications  $V(\mathbf{m}) \rightarrow \mathbb{R}$  (resp.  $E(\mathbf{m}) \rightarrow \mathbb{R}$ ). L'espace vectoriel des applications  $\mathbf{l} \in l(V)$  telles que  $\mathbf{l}(v_*) = 0$  sera noté  $l_0(V)$ . Notons  $l_-(E)$  le sous-espace vectoriel de  $l(E)$  constitué des applications antisymétrique (de sorte que  $\theta \in l_-(E)$  si pour tout  $\epsilon \in E$ ,  $\theta(\epsilon) = -\theta(\bar{\epsilon})$ ). Définissons l'application  $\nabla$  par :

$$\begin{aligned} \nabla : l(V) &\rightarrow l_-(E) \\ \mathbf{l} &\mapsto \nabla \mathbf{l}, \end{aligned}$$

où  $\nabla \mathbf{l}$  est définie par  $\nabla \mathbf{l}(\epsilon) = \mathbf{l}(\epsilon^+) - \mathbf{l}(\epsilon^-)$ . Remarquons que  $\nabla_V := \nabla l_0(V)$  est l'ensemble des potentiels, qui est isomorphe à  $l_0(V)$ . Notons ensuite  $\lambda_\nabla$  la mesure sur  $\nabla$  définie comme la mesure image de  $\prod_{v \in V \setminus \{v_*\}} dy_v$  par  $\nabla$ , qui sera appelée mesure de Lebesgue sur  $\nabla_V$ . Notons finalement pour des entiers strictement positifs  $(r_\epsilon, \epsilon \in \mathbf{E})$  :

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{x}) = \sum_{\epsilon \in \mathbf{E}} x_\epsilon^2 / r_\epsilon,$$

qui définit une forme quadratique définie positive sur  $\nabla_V$ , et la mesure gaussienne :

$$\mathcal{N}_r^m(dx) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{|V|-1}{2}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_r(\mathbf{x})}{2}\right) \sqrt{\det \mathcal{E}_r} \lambda_\nabla(dx).$$

**Définition 5.8.** Notons pour  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^E$  :

$$Z^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{a} \in ST(\mathbf{m})} \prod_{\mathbf{e} \notin \mathbf{E}(\mathbf{a})} 2\pi r_{\mathbf{e}},$$

où  $ST(\mathbf{m})$  désigne l'ensemble des arbres couvrants de  $\mathbf{m}$ . Définissons finalement la mesure  $\widehat{\text{PN}}_{\mathbf{m}}$  sur  $\mathbb{R}_+^E \times \nabla_V$  par :

$$\widehat{\text{PN}}_{\mathbf{m}}(d\mathbf{r}, d\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{r}}{\sqrt{Z^{\mathbf{m}}(\mathbf{r})}} \mathcal{N}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{m}}(d\mathbf{x}).$$

L'utilisation du théorème limite local permet de montrer le résultat suivant et explique grossièrement l'apparition d'une mesure gaussienne.

**Proposition 5.9.** Posons  $\zeta = (8/9)^{1/4}$ . Soit  $(G_a)_{a>0}$  une famille de fonctions réelles définies sur  $\mathbb{N}^E \times \mathbb{Z}^E$  vérifiant d'une part :

$$|G_a(\mathbf{r}, \mathbf{x})| \leq K \exp\left(-ca^{1/2} \sum_{\mathbf{e} \in \mathbf{E}} r_{\mathbf{e}}\right)$$

pour certaines constantes  $K, c > 0$ , et d'autre part :

$$G_a(\mathbf{r}_a, \mathbf{x}_a) \rightarrow G(\mathbf{r}, \mathbf{x})$$

dès que  $\mathbf{r}_a/(2a)^{1/2} \rightarrow \mathbf{r}$  et  $\mathbf{x}_a/(\zeta a^{1/4}) \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{R}^E$ . Alors :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\zeta^{k+2g-1}}{2^{\frac{|\mathbf{E}|}{2}} a^{\frac{v+|\mathbf{E}|-1}{4}}} \widehat{\text{WN}}_{\mathbf{m}}(G_a) = \widehat{\text{PN}}_{\mathbf{m}}(G).$$

### 5.3 Étude des limite d'échelle de $\text{WN}_{\mathbf{m}}$

**Définition 5.10.** Soient  $P_{0 \rightarrow x}^r(dw)$  la loi d'un pont brownien standard de durée  $t$  entre 0 et  $x$  et  $P_{0 \rightarrow x}^r(dw dw')$  la mesure image de  $P_{0 \rightarrow x}^r(dw)$  par l'application  $w \mapsto (w, \bar{w})$ . Définissons la mesure  $\text{PN}_{\mathbf{m}}$  sur  $\text{WN}_{\mathbf{m}}$  par :

$$\text{PN}_{\mathbf{m}}(d(w^\epsilon, \epsilon \in E)) = \int_{\mathbb{R}_+^E \times \nabla_V} \widehat{\text{PN}}_{\mathbf{m}}(d\mathbf{r}, d\mathbf{x}) \prod_{\epsilon \in E_{1/2}} P_{0 \rightarrow x_\epsilon}^{r_\epsilon}(dw^\epsilon d\bar{w}^\epsilon).$$

**Définition 5.11.** Définissons l'opération de changement d'échelle  $\phi^a$  sur  $\mathcal{W}$  par :

$$\phi^a(w) = \left(\frac{9}{8a}\right)^{1/4} w((2a)^{1/2}s) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \tau(w)/(2a)^{1/2}.$$

L'action de  $\phi^a$  est naturellement étendue à  $\mathcal{W}^k$  composante par composante.

**Proposition 5.12.** Soit  $H : \mathcal{W}^E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que :

$$|H((w^\epsilon, \epsilon \in E))| \leq K \exp\left(-c \sum_{\epsilon \in E} \tau(w^\epsilon)\right)$$

pour deux constantes  $K, c > 0$ . Alors :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\zeta^{k+2g-1}}{2^{\frac{|\mathbf{E}|}{2}} a^{\frac{v+|\mathbf{E}|-1}{4}}} \text{WN}_{\mathbf{m}}(H \circ \phi^a) = \text{PN}_{\mathbf{m}}(H).$$

La démonstration consiste à utiliser la proposition 5.9 et à incorporer la trajectoire des  $(w^\epsilon)$  en utilisant un principe d'invariance de Donsker conditionné.

## 5.4 Étude des limites d'échelle des serpents discrets

**Définition 5.13.** On note, pour  $r > 0$ ,  $S_r$  la loi du couple  $((B_s)_{0 \leq s \leq I_r^{-1}}, (S_s)_{0 \leq s \leq I_r^{-1}})$ , où :

1.  $(B_s, s \geq 0)$  est un mouvement brownien standard réel,
2.  $(I_s = \inf_{0 \leq s' \leq s} B_{s'}, s \geq 0)$  son infimum avant l'instant  $s$  et  $I^{-1}$  l'inverse continu à droite de  $-I$ .
3. conditionnellement à  $B$ ,  $S$  est un processus gaussien réel déterminé par sa covariance :

$$\text{Cov}(S_s, S_{s'}) = \inf_{s \wedge s' \leq s'' \leq s \vee s'} (B_{s''} - I_{s''}).$$

**Proposition 5.14.** Le processus  $S$  admet une modification continue.

**Définition 5.15.** Définissons des fonctions de changement d'échelle  $\vartheta^a$  et  $\psi^a$  sur  $\mathcal{W}$  par :

$$\vartheta^a(c) = \frac{1}{(2a)^{1/2}} c(2as) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \tau(c)/2a,$$

et :

$$\psi^a(z) = \left(\frac{9}{8a}\right)^{1/4} z(2as) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \tau(z)/2a.$$

**Proposition 5.16.** Soit  $t > 0$  fixé et soit  $(r_a)_{a>0}$  une suite d'entiers positifs tels que  $r_a/(2a)^{1/2} \rightarrow r$ . Alors la mesure  $(\vartheta^a, \psi^a)_* \text{DS}_{r_a}$  converge en loi vers  $S_r$  lorsque  $a \rightarrow +\infty$ . Si, de plus,  $U_n$  suit la loi uniforme sur  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , alors :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int \text{DS}_{r_a}(d(c, z)) U_{\tau(c)}(dt) H(\vartheta^a(c), \psi^a(z), t/2a) = \int S_r(d(c, z)) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{dt \mathbb{1}_{0 \leq t \leq \tau(c)}}{\tau(c)} H(c, z, t).$$

**Remarque 5.17.** La proposition précédente est une généralisation aux forêts de résultats classiques concernant la convergence en loi des processus conjoints des contours et d'étiquettes d'arbres de Galton-Watson uniformes. Expliquons par exemple intuitivement l'apparition du terme  $(8/9)^{1/4}$ . La quantité  $z(2as)$  correspond à l'étiquette d'un sommet situé à la hauteur  $c(2as)$ . Or, conditionnement au contour, les étiquettes d'un arbre de Galton-Watson sont distribués uniformément indépendamment. Ainsi, conditionnement à  $c$ ,  $z(2as)$  est le  $c(2as)$ -ième terme d'une marche aléatoire symétrique de pas  $-1, 0$  ou  $1$  (et donc de variance  $2/3$ ). D'après le théorème central limit et la convergence en loi du processus renormalisé  $c(2as)/\sqrt{2a}$ , le coefficient de normalisation naturel de  $z(2as)$  vaut :

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{c(2as)} \simeq \left(\frac{8a}{9}\right)^{1/4}.$$

## 5.5 Étude des limite d'échelle de $\text{LM}_{g,k}$

On suppose ici que  $(g, k) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$ .

**Définition 5.18.** Sur  $\mathbf{C}_{g,k}$  (voir définition 4.24), on définit ensuite la mesure  $\text{CLM}_{g,k}$  par :

$$\text{CLM}_{g,k} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{g,k}^3} \text{CLM}_{\mathbf{m}},$$

où  $\text{CLM}_m$  est la mesure :

$$\delta_m \text{PN}_m(d(w^\epsilon)_{\epsilon \in E(m)}) \bigotimes_{\epsilon \in E(m)} S_{r_\epsilon}(d(c^\epsilon, z^\epsilon)) dt^* \mathbb{1}_{0 \leq t^* \leq \tau^*}.$$

**Définition 5.19.** On définit l'opérateur de changement d'échelle  $\xi^a$  sur  $\text{LM}_{g,k}$  par :

$$\xi^a(\mathbf{m}, (w, c, z), t^*) = (\mathbf{m}, ((\phi^a(w^\epsilon), \vartheta^a(c^\epsilon), \psi^a(z^\epsilon)), \epsilon \in E(\mathbf{m})), t^*/2a).$$

**Théorème 5.20.** On suppose que  $(g, k) \notin \{(0, 1), (0, 2)\}$ . Soit  $H$  une application continue sur  $\mathcal{C}_{g,k}$  telle que :

$$|H((\mathbf{m}, (w, c, z), t^*))| \leq K \frac{\exp(-\beta \tau_{(w,c,z)})}{\tau_{(w,c,z)}} \quad \text{pour tous } (\mathbf{m}, (w, c, z), t^*) \in \mathcal{C}_{g,k},$$

où  $\tau_{(w,c,z)} = \sum_{\epsilon \in E(\mathbf{m})} \tau^\epsilon$ . Alors :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\zeta^{k+2g-1}}{2^{3g-2+\frac{3k}{2}} a^{\frac{5g}{2}+\frac{5k-7}{4}}} \text{LM}_{g,k}(H \circ \xi^a) = \text{CLM}_{g,k}(H).$$

## 5.6 Cas particuliers $(g, k) = (0, 1)$ ou $(0, 2)$

Commençons par traiter le cas  $(g, k) = (0, 1)$ , où une carte étiquetée  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) \in \text{LM}_{0,1}$  n'est qu'un arbre enraciné et étiqueté, décrit conséquemment par un serpent discret  $\Xi_{0,1}(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) = (c, z) \in \mathcal{S}_1$ . La mesure image de  $\mathcal{Q}_{0,1}$  par  $\tilde{\Psi}_{0,1}$  charge chaque serpent discret  $(c, z)$  de durée  $\tau(c) = 2n + 1$  d'une quantité  $2 \cdot 12^{-n} = 4 \cdot 2^{-2n-1} 3^{-n}$ . Cette mesure vaut donc  $4\text{DS}_1$  (voir proposition 5.5). On notera :

$$\text{LM}_{0,1} = 4\text{DS}_1.$$

Définissons son équivalent continu  $\text{CLM}_{0,1}$  comme suit. Considérons  $N(dc)$  la mesure d'Itô sur  $\mathcal{W}$ , normalisée de sorte que  $N(\tau(c) \in dt) = (2\pi t^3)^{-1/2} dt$  et notons  $\mathbf{N}(d(c, z))$  la mesure sur  $\mathcal{W}^2$  telle que sous  $\mathbf{N}$ , la loi de  $c$  est  $N$  et telle que, conditionnellement à  $c, z$  est un processus gaussien centré de covariance :

$$\text{Cov}(z(s), z(s')) = \inf_{s \wedge s' \leq s'' \leq s \vee s'} c(s'').$$

Définissons finalement  $\text{CLM}_{0,1} = 4\mathbf{N}$ .

**Proposition 5.21.** Soit  $H$  une application continue réelle définie sur  $\mathcal{W}^2$  telle que pour tous  $(c, z) \in \mathcal{S}_1$ , en notant  $\tau := \tau(c)$  :

$$|H(c, z)| \leq K\tau \exp(-\beta\tau)$$

pour des constantes  $K, \beta > 0$ . Alors :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (2a)^{1/2} \text{LM}_{0,1}(H \circ (\vartheta^a, \psi^a)) = \text{CLM}_{0,1}(H).$$

La remarque 5.17 s'applique également ici, à ceci près que ceci concerne le cas plus délicat où les arbres de Galton-Watson sont conditionnés à avoir une certaine longueur (ce qui explique l'apparition de la mesure d'excursion d'Itô).

Traitons finalement le cas  $(g, k) = (0, 2)$ . La mesure image de  $\mathbf{Q}_{0,2}$  par  $\tilde{\Psi}_{0,2}$  est la mesure  $\mathbf{LM}_{0,2} = 2 \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{0,2}^{\geq 3} = \{\mathbf{m}_0, \mathbf{m}'_0\}} \mathbf{LM}_{\mathbf{m}}$ , où :

$$\mathbf{LM}_{\mathbf{m}} = \delta_{\mathbf{m}} \mathbf{WN}_{\mathbf{m}}(dw^{\varepsilon^*} dw^{\bar{\varepsilon}^*}) \mathbf{DS}_1(d(c, z)) \#_{\tau}(dt^*) \mathbf{DS}_{r_{\varepsilon^*}-1}(d(c^{\varepsilon^*}, z^{\varepsilon^*})) \mathbf{DS}_{r_{\varepsilon^*}}(d(c^{\bar{\varepsilon}^*}, z^{\bar{\varepsilon}^*})).$$

Définissons son équivalent continu  $\mathbf{CLM}_{0,2} = 2 \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{0,2}^{\geq 3} = \{\mathbf{m}_0, \mathbf{m}'_0\}} \mathbf{CLM}_{\mathbf{m}}$ , où :

$$\mathbf{CLM}_{\mathbf{m}} = \delta_{\mathbf{m}} \mathbf{PN}_{\mathbf{m}}(dw^{\varepsilon^*} dw^{\bar{\varepsilon}^*}) \mathbf{N}(d(c, z)) dt^* \mathbb{1}_{\{0 \leq t^* \leq \tau\}} \mathbf{S}_{r_{\varepsilon^*}}(d(c^{\varepsilon^*}, z^{\varepsilon^*})) \mathbf{S}_{r_{\varepsilon^*}}(d(c^{\bar{\varepsilon}^*}, z^{\bar{\varepsilon}^*})).$$

Similairement à la définition 5.19, nous définissons l'opérateur de changement d'échelle  $\xi^a$  sur  $\mathbf{LM}_{0,1}$ .

**Proposition 5.22.** Soit  $H$  une application continue réelle telle que :

$$|H| \leq K \exp(-\beta \tau_1)$$

pour des constantes  $K, \beta > 0$ . Alors :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\zeta}{2a^{3/4}} \mathbf{LM}_{0,2}(H \circ \xi^a) = \mathbf{CLM}_{0,2}(H).$$

## 6 Topologie sur les espaces métriques

Après avoir introduit une topologie métrisable sur l'ensemble des espaces métriques compacts (section 6.2), nous étudions une topologie métrisable sur l'ensemble des espaces métriques compacts à poids (c'est-à-dire les triplets  $(X, d, \mu)$  où  $(X, d)$  est un espace métrique compact et  $\mu$  une mesure de probabilité borélienne sur cet espace), appelée topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov, afin de donner un bon cadre d'étude de la convergence des variables aléatoires  $[V(\mathbf{q}), d_{\mathbf{q}}, \mu_{\mathbf{q}}]$  où  $\mathbf{q}$  est une quadrangulation choisie suivant une certaine loi (section 6.3).

Notre but final sera de montrer que cette suite de variables aléatoires est tendue et d'étudier les espaces limites possibles. Si  $[X, d, \mu]$  est une espace limite possible, nous choisirons deux points  $x, y \in X$  indépendamment suivant la loi  $\mu$  pour étudier les géodésiques reliant  $x$  à  $y$ . Afin de définir rigoureusement ce choix conditionné, nous introduisons les espaces métriques marqués aléatoirement (section 6.4).

Pour étudier les propriétés topologiques d'un espace limite possible, nous avons besoin d'obtenir des renseignements à partir d'informations topologiques sur chacun des espaces de la suite, autrement dit d'explorer certaines propriétés qui passent à la limite au sens de Gromov-Hausdorff-Prokhorov (section 6.5).

### 6.1 Convergence de variables aléatoires dans les espaces polonais

Nous rappelons quelques résultats classiques de convergence de variables aléatoires dans les espaces polonais dont nous nous servons ; entre autres, d'une part, un critère de relative compacité et d'autre part une sorte de transformation d'une convergence en loi en une convergence presque sûre. Nous renvoyons à l'ouvrage de Billingsley [1] pour les preuves.

**Théorème 6.1** (Convergence en loi). *Soient  $(E, d)$  un espace métrique,  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $E$ . Pour une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $E$ , on a équivalence entre :*

(i) *pour tout fonction réelle continue bornée sur  $E$  :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)],$$

(ii) *pour tout fermé  $F$  de  $E$  :*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F).$$

*Le cas échéant, on dit que  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ .*

**Définition 6.2.** Un espace topologique est dit *polonais* si sa topologie peut être définie par une métrique complète et s'il est séparable.

Comme le montrent les résultats qui suivent, les espaces polonais jouissent de propriétés particulières en ce qui concerne la convergence en loi de variables aléatoires.

**Théorème 6.3** (Prokhorov). *Soit  $(E, d)$  un espace métrique polonais. Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $E$ . Alors cette suite admet une sous-suite qui converge en loi si, et seulement si, elle est tendue, c'est-à-dire si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un compact  $K$  de  $E$  tel que :*

$$\inf_{n \geq 0} \mathbb{P}(X_n \in K) \geq 1 - \epsilon.$$

L'intérêt du théorème de Prokhorov provient de la proposition suivante.

**Proposition 6.4.** Soient  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires. On a équivalence entre :

1.  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ ,
2. d'une part, toute sous-suite  $(X_n)$  admet elle-même une sous-suite qui converge en loi et, d'autre part, toute sous-suite de  $(X_n)$  qui converge en loi converge vers  $X$ .

**Preuve.** Il suffit de montrer la réciproque. Par l'absurde, soit  $f$  une fonction réelle continue bornée telle que  $\mathbb{E}[f(X_n)]$  ne converge pas vers  $\mathbb{E}[f(X)]$ . Soit alors  $\epsilon > 0$  et  $\phi$  une extractrice telle que pour tout  $n$ ,  $|\mathbb{E}[f(X_{\phi(n)})] - \mathbb{E}[f(X)]| > \epsilon$ . Or il existe une extractrice  $\psi$  telle que  $(X_{\phi(\psi(n))})$  converge en loi vers  $X$ , ce qui contredit le fait que pour tout  $n$  on ait  $|\mathbb{E}[f(X_{\phi(\psi(n))})] - \mathbb{E}[f(X)]| > \epsilon$ . ■

Les deux résultats précédents fournissent ainsi le critère suivant.

**Corollaire 6.5.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique polonais. Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $E$ . On a équivalence entre :

1.  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$
2.  $(X_n)$  est tendue et toute sous-suite de  $(X_n)$  qui converge en loi converge vers  $X$ .

**Remarque 6.6.** Ainsi, dans les espaces polonais, pour montrer que  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ , on procède en deux étapes : on montre d'abord la tension, puis on établit un résultat d'unicité. L'intérêt est que pour cette dernière étape, on suppose qu'une sous-suite de  $(X_n)$  converge en loi afin d'identifier la limite. Le simple fait de savoir que  $(X_n)$  converge en loi rend en effet de précieux services.

On en déduit également aisément le résultat suivant.

**Corollaire 6.7.** Soient  $E, F$  deux espaces métriques polonais, et  $(X_n), (Y_n)$  deux suites de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité à valeurs dans respectivement  $E$  et  $F$ . Alors  $(X_n, Y_n)_n$  admet une sous-suite qui converge en loi si, et seulement cas  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  admettent des sous-suites qui convergent en loi.

Le théorème suivant permet en quelque sorte de transformer la convergence en loi en convergence presque sûre, ce qui permet de travailler « à  $\omega$  fixé ».

**Théorème 6.8** (Représentation de Skorokhod). *Soient  $(E, d)$  un espace métrique polonais,  $(X_n)$  une suite de variable aléatoires à valeurs dans  $E$  convergeant en loi vers  $X$ . Alors il existe un triplet probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et des variables aléatoires  $\tilde{X}, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots$ , toutes définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , telles que :*

- (i) les variables aléatoires  $X$  et  $\tilde{X}$  ont même loi, tout comme  $X_n$  et  $\tilde{X}_n$  pour  $n \geq 1$ ,
- (ii) pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\tilde{X}_n(\omega)$  converge vers  $X(\omega)$  (au sens de la convergence dans  $(E, d)$ ).

Terminons par une propriété des couplages dans les espaces polonais (voir [14] pour plus de détails concernant la désintégration).

**Définition 6.9.** Soient  $\mu, \mu'$  deux mesures de probabilité boréliennes sur respectivement deux espaces métriques  $(X, d), (X', d')$ . On dit qu'une mesure borélienne  $\nu$  sur l'espace produit  $X \times X'$  est un couplage entre  $\mu$  et  $\mu'$  si  $\pi_*\nu = \mu$  et  $\pi'_*\nu = \mu'$ .

**Théorème 6.10** (Désintégration). Soient  $\mu, \mu'$  deux mesures de probabilité boréliennes sur respectivement deux espaces métriques  $(X, d), (X', d')$ . Soit  $\nu$  un couplage entre  $\mu$  et  $\mu'$ . Alors il existe un noyau markovien  $Q_\nu$  tel que  $\nu$  s'écrive  $\mu(dx)Q_\nu(x, dy)$ .

## 6.2 Distance de Gromov-Hausdorff

Nous introduisons ici une topologie métrisable sur l'ensemble des espaces métriques compacts et donnons une caractérisation des parties compactes. Nous renvoyons à [2] pour les démonstrations.

**Définition 6.11.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On note  $d_H$  la distance de Hausdorff sur les fermés de  $X$  définie par :

$$d_H(C, C') = \inf\{\epsilon > 0; C \subset (C')^\epsilon \text{ et } C' \subset (C)^\epsilon\},$$

où  $A^\epsilon = \{x \in X; \inf_{y \in A} d(x, y) < \epsilon\}$  est le  $\epsilon$ -voisinage de  $A$ .

**Définition 6.12.** Notons  $\mathbb{M}$  l'ensemble des classes d'isométries des espaces métriques compacts. Si  $X = [X, d]$  et  $X' = [X', d']$  appartiennent à  $\mathbb{M}$ , notons :

$$d_{\text{GH}}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')),$$

où l'infimum est pris sur toutes les isométries  $\phi, \phi'$  issues respectivement de  $X, X'$  et à valeurs dans un espace métrique commun  $(Z, \delta)$ .

Cette définition n'est pas très commode à utiliser puisqu'elle fait intervenir un autre espace métrique inconnu. La notion de correspondance que nous définissons maintenant, permet de pallier cette difficulté.

**Définition 6.13.** Une correspondance parmi deux ensembles  $X, X'$  est un sous-ensemble  $\mathcal{R} \subset X \times X'$  telle que  $\pi(\mathcal{R}) = X$  et  $\pi'(\mathcal{R}) = X'$ , où  $\pi : X \times X' \rightarrow X$  et  $\pi' : X \times X' \rightarrow X'$  désignent les projections canoniques. Lorsque  $(x, x') \in \mathcal{R}$ , nous écrirons  $x\mathcal{R}x'$ . Notons  $\mathcal{C}(X, X')$  (resp.  $\mathcal{C}_c(X, X')$ ) l'ensemble des correspondances (resp. à support compact) entre  $X$  et  $X'$ . Si  $(X, d)$  et  $(X', d')$  sont des espaces métriques et  $\mathcal{R} \in \mathcal{C}(X, X')$  est une correspondance, on définit la *distorsion* de  $\mathcal{R}$  par :

$$\text{dis}(\mathcal{R}) = \sup_{x\mathcal{R}x', y\mathcal{R}y'} |d(x, y) - d'(x', y')|.$$

La propriété suivante relie la distance de Gromov-Hausdorff à la distorsion.

**Proposition 6.14.** Soient  $X = [X, d], X' = [X', d'] \in \mathbb{M}$ . Alors :

$$d_{\text{GH}}(X, X') = \frac{1}{2} \inf_{\mathcal{R} \in \mathcal{C}(X, X')} \text{dis} \mathcal{R}.$$

L'assertion suivante décrit quelques propriétés topologiques de  $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$ .

**Théorème 6.15.** 1.  $d_{\text{GH}}$  définit une métrique sur  $\mathbb{M}$ . L'espace métrique  $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$  est complet et séparable.

2. Une partie  $\mathbf{A} \subset \mathbb{M}$  est compacte dans  $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$  si, et seulement si, d'une part  $\{\text{diam}(X); X \in \mathbf{A}\}$  est borné, et d'autre part, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N > 0$  tel que tout  $X \in \mathbf{A}$  peut être recouvert par  $N$  boules ouvertes de rayon  $\epsilon$ .

### 6.3 Distance de Gromov-Hausdorff-Prokhorov

Nous étendons maintenant les résultats précédents au cas des espaces métriques compacts à poids. Pour les résultats de cette section et de la suivante, nous renvoyons aux démonstrations de l'article de Miermont [10].

**Définition 6.16.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et notons  $M^1(X)$  l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes définies sur  $X$ . Alors

$$d_P(\mu, \mu') = \inf\{\epsilon > 0; \mu(C) \leq \mu'(C^c) + \epsilon \text{ pour tous fermés } C\},$$

définit une métrique sur  $M^1(X)$ , appelée distance de Prokhorov, qui métrise la convergence en loi.

**Définition 6.17.** Un *espace métrique compact à poids* est un triplet  $(X, d, \mu)$  où  $(X, d)$  est un espace métrique compact et  $\mu$  une mesure de probabilité borélienne sur  $(X, d)$ . On dit que deux tels espaces  $(X, d, \mu)$  et  $(X', d', \mu')$  sont équivalents s'il existe une bijection isométrique  $\phi : X \rightarrow X'$  telle que  $\phi_*\mu = \mu'$ . La classe d'équivalence de  $(X, d, \mu)$  pour cette relation d'équivalence est notée  $[X, d, \mu]$ . L'ensemble de ces classes d'équivalence est noté  $\mathbb{M}_w$ .

Nous définissons maintenant un candidat pour une distance sur  $\mathbb{M}_w$ .

**Définition 6.18.** Soient  $X = [X, d, \mu], X' = [X', d', \mu'] \in M_w$ . On définit :

$$d_{\text{GHP}}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')) \vee d_P(\phi_*\mu, \phi'_*\mu'),$$

où l'infimum est pris sur toutes les isométries  $\phi, \phi'$  issues respectivement de  $X, X'$  et à valeurs dans un espace métrique commun  $(Z, \delta)$ .

Comme précédemment, cette distance peut être définie de manière « intrinsèque », c'est-à-dire sans faire intervenir un autre espace métrique.

**Proposition 6.19.** Soient  $X = [X, d, \mu], X' = [X', d', \mu'] \in M_w$ . Alors :

$$d_{\text{GHP}}(X, X') = \inf\{\epsilon > 0; \exists \nu \in \mathcal{M}(\mu, \mu'), \exists \mathcal{R} \in \mathcal{C}_c(X, X'), \nu(\mathcal{R}) \geq 1 - \epsilon \text{ et } \frac{1}{2} \text{dis } \mathcal{R} \leq \epsilon\}.$$

On en déduit le résultat suivant.

**Théorème 6.20.** L'application  $d_{\text{GHP}}$  définit une distance sur  $\mathbb{M}_w$ .

Étudions maintenant quelques propriétés topologiques de  $(\mathbb{M}_w, d_{\text{GHP}})$ .

**Théorème 6.21.** 1.  $d_{\text{GHP}}$  définit une métrique sur  $\mathbb{M}_w$ . L'espace métrique  $(\mathbb{M}_w, d_{\text{GHP}})$  est complet et séparable.

2. Une partie  $\mathbf{A} \subset \mathbb{M}_w$  est relativement compacte dans  $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$  si, et seulement si,  $\{[X, d]; [X, d, \mu] \in \mathbf{A}\}$  est relativement compacte dans  $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$ .

## 6.4 Espaces métriques marqués aléatoirement

Commençons par définir la topologie de Gromov-Hausdorff lorsque quelques points sont distingués.

**Définition 6.22.** Un  $k$ -espace métrique marqué est un triplet  $(X, d, (x_1, \dots, x_k))$  où  $(X, d)$  est un espace métrique compact et  $x_1, \dots, x_k \in X$ . Sa classe d'isométrie définie de manière naturelle est notée  $[X, d, (x_1, \dots, x_k)]$  et  $\mathbb{M}_k^*$  désigne l'ensemble des classes d'isométries de  $k$ -espaces métriques, qu'on munit de la distance :

$$d_{\text{GH}}^k(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \left( \delta_H(\phi(X), \phi'(X')) \vee \max_{1 \leq i \leq k} \delta_H(\phi(\{x_i\}), \phi'(\{x'_i\})) \right),$$

où l'infimum est pris sur toutes les isométries  $\phi, \phi'$  issues respectivement de  $X, X'$  et à valeurs dans un espace métrique commun  $(Z, \delta)$ .

On en déduit aisément :

**Proposition 6.23.** 1. L'application  $d_{\text{GH}}^k$  définit une distance sur  $\mathbb{M}_k^*$  qui vaut également :

$$d_{\text{GH}}^k(X, X') = \frac{1}{2} \inf_{\mathcal{R}} \text{dis } \mathcal{R},$$

où l'infimum porte sur toutes les correspondances  $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_c(X, X')$  telles que pour tout  $i$ ,  $x_i \mathcal{R} x'_i$ .

2. L'espace métrique  $(\mathbb{M}_k^*, d_{\text{GH}}^k)$  est complet séparable.
3. Une partie  $\mathbf{A} \subset \mathbb{M}_k^*$  est relativement compacte dans  $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$  si, et seulement si

$$\{[X, d]; [X, d, (x_1, \dots, x_k)] \in \mathbf{A}\}$$

est relativement compacte dans  $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$ .

Étant donné un espace métrique  $(X, d)$ , nous souhaitons choisir indépendamment au hasard  $k$  points de  $X$  et considérer le  $k$ -espace métrique marqué ainsi obtenu. À cet effet, nous devons définir un noyau de transition et vérifier la mesurabilité de certaines applications.

**Définition 6.24.** Pour un entier  $k \geq 1$ , notons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_k : \mathbb{M}_w \times \mathcal{B}(\mathbb{M}_k^*) &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([X, d, \mu], \mathbf{A}) &\mapsto \int_{X^k} \mu^{\otimes k}(d\mathbf{x}) \mathbb{1}_{\mathbf{A}}([X, d, \mathbf{x}]), \end{aligned}$$

l'intégrale ayant un sens car l'application de  $X^k$  dans  $\mathbb{M}_k^*$  qui à  $\mathbf{x}$  associe  $[X, d, \mathbf{x}]$  est continue de sorte que  $\mathbf{x} \mapsto \mathbb{1}_{\mathbf{A}}([X, d, \mathbf{x}])$  est mesurable par composition.

**Lemme 6.25.** Pour  $\mathbf{A} \subset \mathbb{M}_k^*$  fermé, l'application  $X \mapsto \mathfrak{m}_k(X, \mathbf{A})$  est semi-continue supérieure. Ainsi,  $\mathfrak{m}_k$  est un noyau markovien.

**Preuve.** Fixons  $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{M}_k^*)$ ,  $X \in M_w$  et montrons que :

$$\limsup_{X' \rightarrow X} m_k(X', \mathbf{A}) \leq m_k(X, \mathbf{A}).$$

Soient  $\epsilon > 0$ ,  $X' \in \mathbb{M}_w$  tel que  $d_{\text{GHP}}(X, X') < \epsilon$ . D'après la proposition 6.19, considérons  $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_c(X, X')$ ,  $\nu \in \mathbb{M}(\mu, \mu')$  tels que  $\nu(\mathcal{R}) > 1 - \epsilon$  et dis  $\mathcal{R} < 2\epsilon$ . Ainsi :

$$\nu^{\otimes k}(\{(\mathbf{x}, \mathbf{x}'); x_i \mathcal{R} x'_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k\}^c) \leq 1 - (1 - \epsilon)^k.$$

Or si pour tout  $1 \leq i \leq k$  on a  $x_i \mathcal{R} x'_i$ , alors  $d_{\text{GH}}^k([X, d, \mathbf{x}], [X', d', \mathbf{x}']) < \epsilon$ . Par suite, si  $[X', d', \mathbf{x}'] \in \mathbf{A}$ , alors  $[X, d, \mathbf{x}] \in \mathbf{A}^\epsilon$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{X^k} \mu^{\otimes k}(d\mathbf{x})(1 - \mathbb{1}_{\mathbf{A}^\epsilon}([X, d, \mathbf{x}])) &= \int_{(X \times X')^k} \nu^{\otimes k}(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}') (1 - \mathbb{1}_{\mathbf{A}^\epsilon}([X, d, \mathbf{x}])) \\ &\leq 1 - (1 - \epsilon)^k + \int_{(X \times X')^k} \nu^{\otimes k}(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}') (1 - \mathbb{1}_{\mathbf{A}}([X', d', \mathbf{x}'])) \\ &\leq 1 - (1 - \epsilon)^k + \int_{X'^k} (\mu')^{\otimes k}(d\mathbf{x}') (1 - \mathbb{1}_{\mathbf{A}}([X', d', \mathbf{x}'])). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_{X'^k} (\mu')^{\otimes k}(d\mathbf{x}') (\mathbb{1}_{\mathbf{A}}([X', d', \mathbf{x}'])) \leq 1 - (1 - \epsilon)^k + \int_{X^k} \mu^{\otimes k}(d\mathbf{x}) \mathbb{1}_{\mathbf{A}^\epsilon}([X, d, \mathbf{x}]).$$

Par convergence dominée et grâce au caractère fermé de  $\mathbf{A}$ , le terme de droite converge vers  $\int_{X^k} \mu^{\otimes k}(d\mathbf{x}) \mathbb{1}_{\mathbf{A}}([X, d, \mathbf{x}]) = m_k(X, \mathbf{A})$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , d'où le résultat.

Finalement,  $m_k$  est bien un noyau markovien car d'une part, pour  $X \in \mathbb{M}_w$ ,  $\mathbf{A} \mapsto m_k(X, \mathbf{A})$  est visiblement une mesure borélienne sur  $\mathbb{M}_k^*$ , et d'autre part un argument de classe monotone montre que  $m_k(\cdot, \mathbf{A})$  est mesurable pour toute partie borélienne  $\mathbf{A}$  de  $\mathbb{M}_k^*$ . ■

**Remarque 6.26.** Ainsi,  $m_k([X, d, \mu], \cdot)$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{M}_k^*$  qui correspond intuitivement à l'espace métrique marqué obtenu à partir de  $X$  en distinguant  $k$  points tirés indépendamment suivant la loi  $\mu$ .

**Proposition 6.27.** Soit  $(X_n, n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{M}_w$  qui converge en loi vers  $X$ . Pour  $Y \in \mathbb{M}_w$ , on note  $Y^k$  la variable aléatoire de loi  $m_k(Y, \cdot)$ . Alors la suite de variables aléatoires  $(X_n^k, n \geq 1)$  converge en loi vers  $X^k$  au sens de la topologie de  $\mathbb{M}_k^*$ .

**Preuve.** D'après le théorème de représentation de Skorokhod 6.8, on peut supposer que toutes les variables aléatoires mises en jeu sont définies sur un espace probabilisé commun  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et que la convergence  $X_n \rightarrow X$  a lieu presque sûrement dans l'espace  $\mathbb{M}_w$ . D'après le lemme 6.25, pour  $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_k^*$  fermé, l'application  $m_k(\cdot, \mathbf{A})$  est semi-continue supérieurement. En appliquant le lemme de Fatou avec les variables aléatoires positives  $(1 - m_k(X_n, \mathbf{A}))_n$ , il vient :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[m_k(X_n, \mathbf{A})] \leq \mathbb{E}[m_k(X, \mathbf{A})],$$

ou, autrement dit,  $\limsup \mathbb{P}(X_n^k \in \mathbf{A}) \leq \mathbb{P}(X^k \in \mathbf{A})$ . On conclut grâce au théorème 6.1. ■

## 6.5 Espaces métriques géodésiques

Nous renvoyons à [2] pour plus d'informations concernant les espaces métriques géodésiques et les preuves.

**Définition 6.28.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On appelle *chemin* toute application continue  $c : [0, 1] \rightarrow X$ . Sa longueur  $l(c)$  est définie par :

$$l(c) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})); n \geq 1, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1 \right\}.$$

**Définition 6.29.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit qu'il est *intrinsèque* si pour tous points  $x, y \in X$  :

$$d(x, y) = \inf_c l(c),$$

où l'infimum porte sur tous les chemins  $c$  tels que  $c(0) = x$  et  $c(1) = y$ .

**Définition 6.30.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit qu'il est *géodésique* s'il existe un chemin  $\gamma_{xy} : [0, d(x, y)] \rightarrow X$  tel que  $\gamma_{xy}(0) = x$ ,  $\gamma_{xy}(d(x, y)) = y$  tel que  $\gamma_{xy}$  soit une isométrie. On dit alors que le chemin  $\gamma_{xy}$  est une *géodésique*.

Rappelons le résultat suivant, qui est une conséquence du théorème d'Arzela-Ascoli.

**Théorème 6.31.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. Alors  $(X, d)$  est intrinsèque si, et seulement si, il est géodésique.

**Définition 6.32.** On note  $\text{PM}$  l'ensemble des classes d'isométries d'espaces métriques compacts géodésiques (ou intrinsèques) et  $\text{PM}_w$  l'ensemble des  $[X, d, \mu] \in \mathbb{M}_w$  tels que  $[X, d] \in \text{PM}$ . De même, on note  $\text{PM}_k^*$  l'ensemble des  $[X, d, \mathbf{x}] \in \mathbb{M}_k^*$  tels que  $[X, d] \in \text{PM}$ .

Nous avons alors les résultats de fermeture suivants.

**Proposition 6.33.**  $\text{PM}$  est fermé dans  $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$ ,  $\text{PM}_w$  est fermé dans  $(\mathbb{M}_w, d_{\text{GHP}})$  et  $\text{PM}_k^*$  est fermé dans  $(\mathbb{M}_k^*, d_{\text{GH}}^k)$ .

## 6.6 Applications

Nous considérons ici une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{M}_w$  ou  $\mathbb{M}_2^*$  convergeant en loi, et sous des hypothèses adéquates concernant le comportement asymptotique de ces variables aléatoires, nous déduisons des propriétés de la variable aléatoire limite.

**Lemme 6.34.** Soit  $([X_n, d_n, \mu_n])_n$  une suite de variables aléatoires qui converge dans  $\mathbb{M}_w$  vers  $[X, d, \mu]$ . On suppose que :

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{X_n} \mu_n(dx) \mu_n(B(x, \epsilon)) = 0,$$

où  $B(x, \epsilon) = \{y \in X; d(x, y) < \epsilon\}$ . Alors  $\mu$  est diffuse, c'est-à-dire que pour presque tout  $x \in X$ ,  $\mu(\{x\}) = 0$ .

**Preuve.** Remarquons que d'après le théorème de Fubini :

$$\int_{X_n} \mu_n(dx) \mu_n(B(x, \epsilon)) = \int_{X_n^2} \mu_n^{\otimes 2}(dx, dy) \mathbb{1}_{\{d_n(x, y) < \epsilon\}},$$

et cette dernière quantité vaut  $m_2(X_n, \mathbf{A})$  où  $\mathbf{A} = \{[X', d', (x', y')] \in \mathbb{M}_2^*; d'(x', y') < \epsilon\}$  est ouvert. On en déduit que d'après le lemme 6.25,  $X \mapsto m_2(X, \mathbf{A})$  est semi-continue inférieurement. Ainsi :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{X_n} \mu_n(dx) \mu_n(B(x, \epsilon)) \geq \int_X \mu(dx) \mu(B(x, \epsilon)).$$

Le théorème de convergence dominée implique alors :

$$\int_X \mu(dx) \mu(\{x\}) = 0,$$

ce qui fournit le résultat désiré. ■

**Définition 6.35.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique géodésique compact,  $x, y \in X$  et  $D \in (-d(x, y), d(x, y))$ . On dit qu'un point  $z \in X$  est dit  $D$ -médian entre  $x$  et  $y$  si  $d(x, z) - d(y, z) = D$ . On note  $\text{med}_{xy}^D(X)$  l'ensemble des points  $D$ -médiants entre  $x$  et  $y$

La propriété suivante est immédiate.

**Proposition 6.36.** L'ensemble  $\text{med}_{xy}^D(X)$  est compact et sépare  $X$  en deux ouverts qui contiennent respectivement  $x$  et  $y$ .

**Définition 6.37** (mêmes notations). On dit que  $z$  est sur une  $\delta$  quasi-géodésique si  $d(x, z) + d(y, z) \leq d(x, y) + \delta$  et on note  $\text{qg}_{xy}^\delta(X)$  l'ensemble de ces points. Définissons finalement :

$$\text{medqg}_{xy}^{D, \delta}(X) = \text{med}_{xy}^D(X) \cap \text{qg}_{xy}^\delta(X).$$

**Lemme 6.38.** Soient  $[X_n, d_n, (x_n, y_n)] \in \text{PM}_2^*$  une suite de variables aléatoire convergeant en loi vers  $[X, d, (x, y)]$  et  $D_n \in (-d_n(x_n, y_n), d_n(x_n, y_n))$  une suite de réels convergeant vers  $D \in (-d(x, y), d(x, y))$ . On suppose que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(\text{medqg}_{x_n y_n}^{D_n, \delta}(X_n)) < \epsilon.$$

Alors  $\text{med}_{xy}^D(X)$  est réduit à un point qui appartient à une géodésique entre  $x$  et  $y$ . Autrement dit,  $\text{medqg}_{xy}^{D, 0}(X)$  est réduit à un singleton.

**Remarque 6.39.** Le lemme précédent signifie que si les points  $D_n$ -médiants  $\delta$  quasi-géodésiques ne sont pas trop éloignés, à la limite on ne trouve qu'un point  $D$  médian.

**Remarque 6.40** (mêmes notations). Si pour presque tout  $D \in (-d(x, y), d(x, y))$ ,  $\text{medqg}_{xy}^{D, 0}(X)$  est réduit à un singleton, il vient qu'il existe une unique géodésique entre  $x$  et  $y$ . Ceci sera utilisé lorsque nous étudierons les géodésiques dans les limites d'échelles de quadrangulations.

## 7 Propriétés métriques des limites d'échelle de quadrangulations aléatoires en genre arbitraire

Nous utilisons maintenant les outils introduits précédemment pour démontrer le théorème principal. Remarquons que pour une quadrangulation bipartie  $\mathbf{q}$ , l'espace métrique compact  $X_{\mathbf{q}} = (V(\mathbf{q}), d_{\mathbf{q}})$  n'est pas géodésique. Nous commençons donc par pallier ce défaut (section 7.1). Nous montrons ensuite le premier point du théorème évoqué en introduction, à savoir la tension d'une suite de variables aléatoires (section 7.2). Puis nous indiquons comment montrer le caractère diffusif d'un espace à poids limite éventuel (section 7.3) ainsi que le résultat concernant l'unicité des géodésiques (section 7.4).

### 7.1 Transformation de $(X_{\mathbf{q}}, d_{\mathbf{q}})$ en un espace géodésique

**Définition 7.1.** Pour une quadrangulation bipartie  $\mathbf{q}$ , considérons des copies du segment  $[0, 1]$  (muni de la métrique usuelle)  $\{x^e; 0 \leq x \leq 1\}$ , indexées par une orientation  $E_{1/2}(\mathbf{q})$  des arêtes de  $\mathbf{q}$ . Notons  $R$  la relation d'équivalence définie par  $xRy$  si  $x$  et  $y$  sont de la forme  $0^e$  ou  $1^e$  et s'ils correspondent au même sommet de  $\mathbf{q}$ . Notons alors  $\tilde{X}_{\mathbf{q}}$  l'ensemble  $\sqcup_e \{x^e; 0 \leq x \leq 1\}/R$  muni de la distance :

$$d_R(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k d(p_i, q_i); p_1 = x, q_k = y, k \in \mathbb{N} \right\},$$

où l'infimum porte sur tous les choix  $\{p_i\}, \{q_i\}$  de points de  $\tilde{X}_{\mathbf{q}}$  tels que pour  $i = 1, \dots, k-1$ ,  $p_{i+1}Rq_i$ .

On a alors aisément :

**Proposition 7.2.** L'espace métrique  $(\tilde{X}_{\mathbf{q}}, d_R)$  est un espace métrique compact géodésique tel que l'espace métrique induit sur  $\cup_e \{0^e, 1^e\}/R$  est isométrique à  $(V(\mathbf{q}), d_{\mathbf{q}})$ . De plus  $d_{\text{GH}}(\tilde{X}_{\mathbf{q}}, X_{\mathbf{q}}) \leq 1$ .

**Remarque 7.3.** En particulier,  $d_{\text{GH}}(a^{-1/4}\tilde{X}_{\mathbf{q}}, a^{-1/4}X_{\mathbf{q}}) \leq a^{-1/4}$ . Ainsi, toute propriété obtenue pour une éventuelle limite d'échelle des  $a^{-1/4}\tilde{X}_{\mathbf{q}}$  sera vérifiée pour celle des  $a^{-1/4}X_{\mathbf{q}}$ . Sans perte de généralité, nous noterons dans ce qui suit  $X_{\mathbf{q}}$  à la place de  $\tilde{X}_{\mathbf{q}}$ ,  $d_R$  sera notée  $d_{\mathbf{q}}$  et les sommets  $\cup_e \{0^e, 1^e\}/R$  seront notés  $V(\mathbf{q})$ . De plus  $\mu_{\mathbf{q}}$  désignera la mesure de probabilité :

$$\mu_{\mathbf{q}} = \frac{1}{V_{\mathbf{q}}} \sum_{v \in V(\mathbf{q})} \delta_v,$$

et  $X_{\mathbf{q}}^w = [V(\mathbf{q}), d_{\mathbf{q}}, \mu_{\mathbf{q}}] \in \mathbb{M}_w$ .

### 7.2 Tension

Après avoir rappelé les définitions de l'introduction, nous rédigeons en détail la démonstration de cette tension car celle-ci combine tous les outils introduits jusqu'ici.

**Définition 7.4.** Pour  $\beta \geq 0$  et un entier  $g \geq 1$ , notons  $\mathbb{Q}_g^{(\beta)}$  la mesure définie sur  $\mathbb{Q}_g$  par :

$$\mathbb{Q}_g^{(\beta)} = \frac{\mathbb{Q}_g(e^{-\beta V_{\mathbf{q}}} d_{\mathbf{q}})}{\mathbb{Q}_g(e^{-\beta V_{\mathbf{q}}})},$$

où  $\mathbf{Q}_g(e^{-\beta V_{\mathbf{q}}} d\mathbf{q})$  désigne la mesure absolument continue par rapport à  $\mathbf{Q}_g$  de densité  $e^{-\beta V_{\mathbf{q}}}$ , et pour  $g = 0$  :

$$\mathbf{Q}_0^{(\beta)} = \frac{\mathbf{Q}_0(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\beta V_{\mathbf{q}}} d\mathbf{q})}{\mathbf{Q}_0(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\beta V_{\mathbf{q}}})}.$$

**Théorème 7.5.** *Pour  $g \geq 0$  et  $\beta > 0$ , la famille des mesures de probabilités :*

$$\mathbf{Q}_g^{\beta/a} (\{(a^{-1/4} X_{\mathbf{q}}^w, a^{-1} V_{\mathbf{q}}) \in \cdot\}), \quad a > 1$$

*est relativement compacte pour la topologie de la convergence faible sur  $\mathbb{M}_w \times (0, \infty)$ .*

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le critère de compacité de Gromov.

**Définition 7.6.** Pour  $X \in \mathbb{M}$  et  $\epsilon > 0$ , notons  $N(X, \epsilon)$  le nombre minimal de boules ouvertes de rayon  $\leq \epsilon$  nécessaires pour recouvrir  $X$ . Pour une suite d'entiers positifs  $N = (N_k)$  notons :

$$K_N = \{[X, d, \mu] \in \text{PM}_w; N([X, d], 2^{-k}) \leq N_k \forall k \geq 1\}.$$

**Proposition 7.7.** Les parties  $K_N$  sont compactes dans  $\text{PM}_w$ .

**Preuve.** C'est une conséquence du second point du théorème 6.15 et de la proposition 6.23. ■

La preuve du théorème 7.5 consiste à montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N, \Delta$  tels que pour tout  $a \geq 1$  :

$$\mathbf{Q}_g^{\beta/a} (\{(a^{-1/4} X_{\mathbf{q}}^w \in K_N, \Delta^{-1} \leq a^{-1} V_{\mathbf{q}} \leq \Delta\}) \geq 1 - \epsilon.$$

Pour cela, nous utilisons les résultats de convergence des limites d'échelle (section 5) dans le cas  $k = 1$  et le lemme 4.26.

**Preuve du théorème 7.5.** Remarquons d'abord que la mesure  $\mathbf{Q}_g^{(\beta)}$  est définie sur  $\mathbf{Q}_g$  et non sur  $\mathbf{Q}_{g,1}$ . Pour cette raison, sur  $\mathbf{Q}_{g,1}$ , on introduit la mesure :

$$\begin{cases} \nu_0^\beta(d(\mathbf{q}, x)) = \frac{\mathbf{Q}_{0,1}(V_{\mathbf{q}} e^{-\beta V_{\mathbf{q}}} d(\mathbf{q}, x))}{\mathbf{Q}_{0,1}(V_{\mathbf{q}} e^{-\beta V_{\mathbf{q}}})} \\ \nu_g^\beta(d(\mathbf{q}, x)) = \frac{\mathbf{Q}_{g,1}(V_{\mathbf{q}}^{-1} e^{-\beta V_{\mathbf{q}}} d(\mathbf{q}, x))}{\mathbf{Q}_{g,1}(V_{\mathbf{q}}^{-1} e^{-\beta V_{\mathbf{q}}})} \quad \text{si } g \neq 0, \end{cases}$$

où  $\mathbf{Q}_{g,1}$  a été introduite à la définition 5.1 et  $\mathbf{Q}_{g,1}(f(\mathbf{q}, x) d(\mathbf{q}, x))$  désigne la mesure absolument continue par rapport à  $\mathbf{Q}_{g,1}$  de densité  $f(\mathbf{q}, x)$ , de sorte que la mesure image de  $\nu_g^\beta$  par l'application qui à  $(\mathbf{q}, x)$  associe  $\mathbf{q}$  est précisément  $\mathbf{Q}_g^{(\beta)}$ .

D'après la proposition 5.4, la mesure image de  $\nu_g^\beta$  par  $\tilde{\Psi}_{g,1}$  s'écrit :

$$\begin{cases} \text{LM}_{0,1}^{(\beta)} = \frac{\text{LM}_{0,1}((\tau/2 + \chi(g)) \exp(-\beta\tau/2) d(c, z))}{\text{LM}_{0,1}((\tau/2 + \chi(g)) \exp(-\beta\tau/2))} \\ \text{LM}_{g,1}^{(\beta)} = \frac{\text{LM}_{g,1}((\tau_l/2 + \chi(g))^{-1} \exp(-\beta\tau_l/2) d(\mathbf{m}, \mathbf{l}, t^*))}{\text{LM}_{g,1}((\tau_l/2 + \chi(g))^{-1} \exp(-\beta\tau_l/2))} \quad \text{si } g \neq 0. \end{cases}$$

D'après le théorème 5.20 et compte tenu du fait que  $\xi^a(\mathbf{m}, \mathbf{l}, t^*) = (\mathbf{m}_a, \mathbf{l}_a, t_a^*)$  implique  $\tau_{\mathbf{l}_a} = \tau_{\mathbf{l}}/2a$ , ceci entraîne que sous  $\text{LM}_{g,1}^{(\beta/a)}$ , la loi de  $\xi^a(\mathbf{m}, \mathbf{l}, t^*)$  converge étroitement vers la mesure de probabilités  $\text{CLM}_{g,1}^{(\beta)}$  définie par :

$$\begin{cases} \text{CLM}_{0,1} = \frac{\text{CLM}_{0,1}(\tau \exp(-\beta\tau) d(c, z))}{\text{CLM}_{0,1}(\tau \exp(-\beta\tau))} \\ \text{CLM}_{g,1}^{(\beta)} = \frac{\text{CLM}_{g,1}(\tau_{\mathbf{l}}^{-1} \exp(-\beta\tau_{\mathbf{l}}) d(\mathbf{m}, \mathbf{l}, t^*))}{\text{CLM}_{g,1}(\tau_{\mathbf{l}}^{-1} \exp(-\beta\tau_{\mathbf{l}}))} \end{cases} \quad \text{si } g \neq 0.$$

Remarquons que la définition particulière pour  $g = 0$  est motivée par le fait que  $\text{CLM}_{0,1}(1/\tau \exp(-\beta\tau)) = \infty$ .

D'après le lemme 4.26, pour  $\delta, N > 0$ , on a par changement de variable :

$$\{N(a^{-1/4}X_{\mathbf{q}}, \delta) > N + 1\} \subset \{N(X_{\mathbf{q}}, a^{-1/4}\delta) > N + 1\} \subset \left\{2(8/9)^{1/4}\omega\left(\psi^a(l), \frac{\tau_{\mathbf{l}}}{2aN} + \frac{1}{2a}\right) \geq \delta\right\}. \quad (8)$$

Il s'agit donc de contrôler la probabilité du dernier événement. Fixons  $\epsilon > 0$  et un entier  $k \geq 1$ . En définissant  $l$  comme dans le lemme 4.26, nous déduisons que sous  $\text{LM}_{g,1}^{(\beta/a)}$ , la loi de  $\psi^a(l)$  converge étroitement vers la loi de  $l$  sous  $\text{CLM}_{g,1}^{(\beta)}$ . D'une part, cette suite de lois est tendue d'après le théorème 6.3, ce qui implique avec le théorème d'Arzela-Ascoli qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $a$  :

$$\mathbb{P}\left[\omega(\psi^a(l), \alpha) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}\right)^{1/4}2^{-k}\right] \leq \epsilon 2^{-k}.$$

D'autre part, d'après le théorème 6.8, nous pouvons supposer que la convergence de  $\psi^a(l)$  vers la loi de  $l$  a lieu presque sûrement, de sorte que  $\tau(\psi^a(l))$  converge presque sûrement vers  $\tau_{\mathbf{l}}$ . Ainsi, il existe un entier  $N_k$  tel que pour tout  $a \geq 1/2\alpha + 1$  :

$$\frac{\tau(\psi^a(l))}{N_k} + \frac{1}{2a} \leq \alpha.$$

D'après la remarque faite en début de preuve, on en déduit que pour  $a \geq 1$  :

$$\mathbb{Q}_g^{\beta/a}(N(a^{-1/4}X_{\mathbf{q}}, 2^{-k}) > N_k + 1) \leq \epsilon 2^{-k}.$$

Ceci implique que  $\mathbb{Q}_g^{\beta/a}(a^{-1/4}X_{\mathbf{q}} \in K_N) \geq 1 - \epsilon$  pour  $N = (N_k + 1)$ .

Finalement, les variables aléatoires  $(V_{\mathbf{q}}/a)$  sont tendues sur  $(0, \infty)$  car elles convergent étroitement vers la loi de  $\tau_{\mathbf{l}}$  sous  $\text{CLM}_{g,1}^{(\beta)}$ . On conclut en utilisant le corollaire 6.7. ■

### 7.3 Caractère diffusif

Le théorème 7.5 montre qu'il existe une suite croissante d'entiers  $(a_n, n \geq 1)$  telle que sous  $\mathbb{Q}_g^{(\beta/a)}$  et le long de cette suite,  $(a^{-1/4}X_{\mathbf{q}}^w, a^{-1}V_{\mathbf{q}})$  converge en loi dans l'espace  $\text{PM}_w \times (0, \infty)$ . Dans tout ce qui suit, nous supposons que  $a$  appartient à la suite  $(a_n, n \geq 1)$ .

**Théorème 7.8.** *Supposons que  $a^{-1/4}X_{\mathbf{q}}^w$  converge en loi vers une variable aléatoire notée  $[X, d, \mu]$ . Alors  $\mu$  est diffuse.*

D'après la preuve du théorème 7.5, le théorème de Skorokhod 6.8 nous garantit l'existence d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et de variables aléatoires  $(\mathbf{q}_a, x_a)$  définies dessus, de lois respectives  $\nu_g^{(\beta/a)}$  telles que, presque sûrement :

1. si  $X_a^w = [X_a, d_a, \mu_a]$ ,  $a^{-1/4}X_a^w$  converge vers  $X^w = [X, d, \mu]$ , qui donc est une variable aléatoire à valeurs dans  $\text{PM}_w$ . On notera aussi  $X_a = [X_a, d_a]$ .
2. Si  $(\mathbf{m}_a, [\mathbf{l}_a]) = \Psi_{g,1}(\mathbf{q}_a, x_a)$  et  $(\mathbf{m}_a, \mathbf{l}_a = (w_a, c_a, z_a), t_a^*) = \tilde{\Psi}(\mathbf{q}_a, x_a)$ ,  $\xi^a(\mathbf{m}_a, (w_a, c_a, z_a), t_a^*)$  converge vers  $(\mathbf{m}, \mathbf{l} = (w, c, z), t^*)$ , qui est une variable aléatoire de loi  $\text{CLM}_{g,1}^{(\beta)}$ .

L'outil principal pour démontrer le théorème 7.8 est le lemme 6.34. Précisons rapidement les étapes de la preuve. On montre d'abord, en utilisant les bornes du 3.25, la convergence presque sûre de  $\psi^a(l_a)$  vers  $l$  et de  $\tau(\psi^a(l_a))$  vers  $\tau(l)$  (où  $l_a, l$  sont définis comme au lemme 4.26), le lemme suivant :

**Lemme 7.9.** On a :

$$\liminf_{a \rightarrow +\infty} \int_{a^{-1/4}} \mu_a(dx) \mu_a(B(x, \epsilon)) \leq \frac{16}{\tau_1^2} \int_{[0, \tau_1]^2} dudv \mathbb{1}_{\{|l(u) - l(v)| \leq \epsilon\}}.$$

On conclut en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, en utilisant le résultat suivant et le lemme 6.34.

**Lemme 7.10.** Presque sûrement, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{t \in [0, \tau_1); l(t) = x\}$  est de mesure de Lebesgue nulle.

La preuve de ce dernier lemme consiste à utiliser le fait que sous  $\text{CLM}_{g,1}$ , conditionnellement à  $(w^\epsilon, c^\epsilon; \mathbf{e} \in E(\mathbf{m}))$ , la loi de  $(l^\epsilon(s), l^\epsilon(t))$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue bi-dimensionnelle.

## 7.4 Géodésiques

Nous concluons en montrant que dans un espace limite  $[X, d, \mu]$  possible, pour  $\mu^{\otimes 2}$  presque tout  $(x, y)$ ,  $x$  et  $y$  sont reliés par une unique géodésique. Plus rigoureusement, nous démontrons le théorème suivant.

**Théorème 7.11.** *Soit une suite croissante d'entiers  $(a_n, n \geq 1)$  telle que sous  $\mathcal{Q}_g^{(\beta/a)}$  et le long de cette suite,  $a^{-1/4}X_{\mathbf{q}}^w$  converge en loi dans l'espace  $\text{PM}_w$  vers une variable aléatoire notée  $\mathcal{T}_g^{(\beta)}(dX)$ . Alors, presque sûrement sous la loi  $\mathcal{T}_g^{(\beta)}(dX) \mathbf{m}_2(X, \cdot)$ ,  $x$  et  $y$  sont reliés par une unique géodésique.*

**Remarque 7.12.** Rappelons qu'intuitivement  $\mathcal{T}_g^{(\beta)}(dX) \mathbf{m}_2(X, \cdot)$  correspond à un espace métrique aléatoire marqué aléatoire obtenu en choisissant un espace métrique à poids  $[X, d, \mu]$  sous la loi  $\mathcal{T}_g^{(\beta)}(dX)$ , puis en marquant deux points choisis indépendamment suivant la loi  $\mu$ .

Pour prouver ce théorème, nous utilisons le lemme 6.38. Nous commençons donc par estimer  $\text{diam}(\text{medqg}_{x_1 x_2}^{D,R}(X_{\mathbf{q}}))$  et renvoyons à l'article de Miermont [10] pour les preuves détaillées.

**Lemme 7.13.** Soit  $(\mathbf{q}, (x_1, x_2), D) \in \mathbf{Q}_{g,2}$ . Notons  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}]) = \Psi_{g,2}(\mathbf{q}, (x_1, x_2), D)$  et  $(\mathbf{m}, (w, c, z), t^*) = \tilde{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, D)$ . Notons  $f_*$  la face de  $\mathbf{m}$  incidente à sa racine  $e_*$  et  $\bar{f}_*$  l'autre face,

$$w = w^{\mathbf{e}_*} w^{\phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{e}_*)} \dots w^{\phi_{\mathbf{m}}^{\deg_{\mathbf{m}}(\mathbf{e}_*)-1}(\mathbf{e}_*)} \quad (9)$$

et  $\Gamma(t)$  le rang de l'arête de  $\mathbf{m}$  sur laquelle se projette l'arête de  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  explorée au temps  $[t]$  par le processus d'exploration  $w$  qui vient d'être défini (voir figure 16). Plus précisément, on pose  $\Gamma(\tau(w)) = \deg_{\mathbf{m}} f_* - 1$  et pour  $0 \leq t \leq \tau(w) - 1$ , on pose  $\Gamma(t) = i$  si :

$$\sum_{j=0}^{i-1} r_{\phi_{\mathbf{m}}^j(\mathbf{e}_*)} \leq t < \sum_{j=0}^i r_{\phi_{\mathbf{m}}^j(\mathbf{e}_*)}.$$

On suppose que  $\min\{w(t); \bar{\mathbf{e}}_{\Gamma(t)} \in \bar{f}_*\}$  est atteint pour une unique valeur  $i_m$  de  $\Gamma(t)$  (ainsi  $\bar{\mathbf{e}}_{i_m} \in \bar{f}_*$ ). On suppose également qu'il existe  $R > 0$  tel que :

$$\min\{w(t); \bar{\mathbf{e}}_{\Gamma(t)} \in \bar{f}_*, \Gamma(t) \neq i_m\} > \min\{w(t); \bar{\mathbf{e}}_{\Gamma(t)} \in \bar{f}_*\} + R/2.$$

Alors :

$$\text{diam}(\text{medqg}_{\mathcal{S}_{x_1 x_2}}^{D,R}(X_{\mathbf{q}})) \leq 2 \max_{\mathbf{e} \in E} \omega(l^{\mathbf{e}}, \text{diam}\{i < \tau^{\mathbf{e}}; w^{\mathbf{e}}(\underline{c}^{\mathbf{e}}(i)) \leq \inf w^{\mathbf{e}} + R/2\}) + R + 4$$

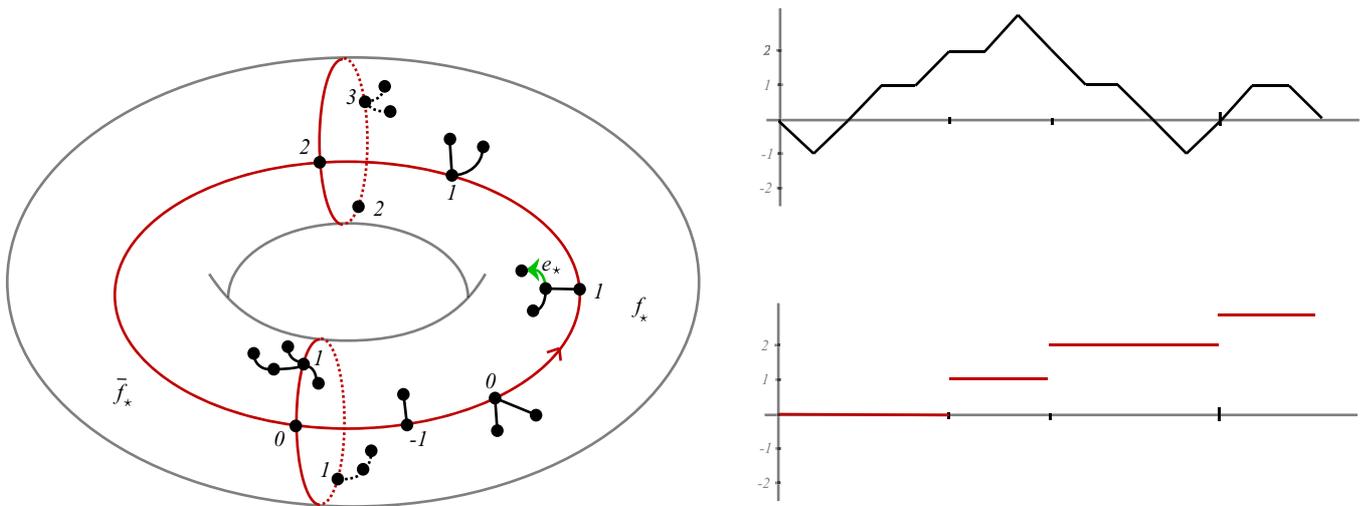


FIG. 16 – Ici,  $(\mathbf{m}, [\mathbf{l}])$  est la carte étiquetée de gauche, le graphe plongé rouge est  $\mathbf{m}^{\geq 2}$  et seules ses étiquettes ont été représentées. Le graphique du haut représente  $w$  et celui du bas représente  $\Gamma$ .

**Remarque 7.14.** Cette inégalité signifie que les points de  $\text{medqg}_{\mathcal{S}_{x_1 x_2}}^{D,R}(X_{\mathbf{q}})$  ne sont pas trop éloignés de sommets qui appartiennent à la fois à  $f_*$  et à  $\bar{f}_*$  et qui réalisent  $\inf w^{\mathbf{e}}$ .

On montre ensuite :

**Lemme 7.15.** Lorsque  $(\mathbf{q}, (x, y), D)$  suit la loi  $\mathbf{Q}_{g,2}^{(\beta/a)}$  définie par :

$$\mathbf{Q}_{g,2}^{(\beta/a)}(d\mathbf{q}, d(x, y), dD) = \mathbf{Q}_g^{(\beta/a)}(d\mathbf{q})\mu_{\mathbf{q}}^{\otimes 2}(d(x, y))|\mathcal{D}(\mathbf{q}, (x, y))|^{-1}\#_{\mathcal{D}(\mathbf{q}, (x, y))}(dD),$$

sous la loi de  $\tilde{\Psi}(\mathbf{q}, (x, y), D)$ ,  $\xi^a(\mathbf{m}, (w, c, z), t^*)$  converge étroitement vers une loi absolument continue par rapport à  $\text{CLM}_{g,2}$  notée  $\text{CLM}_{g,2}^{(\beta)}$ . Rappelons que  $\mathcal{D}(\mathbf{q}, (x, y))$  désigne l'ensemble des vecteurs de retard.

La démonstration suit le cheminement de celle début du théorème 7.5 et fait intervenir le théorème 7.8. Puis :

**Lemme 7.16.** Les événements suivants sont de probabilité nulle sous  $\text{CLM}_{g,2}$  et donc sous  $\text{CLM}_{g,2}^{(\beta)}$  :

1. la quantité  $\inf\{w(t); \bar{\epsilon}_{\Gamma(t)} \in \bar{f}_*\}$  est atteinte pour un unique temps  $t$  qui n'est un pas un instant de saut pour  $\Gamma(t)$  et diffère de 0 et de  $\tau(w)$ ,
2. les quantités  $\text{diam}\{0 \leq s < \tau^\epsilon; w^\epsilon(\underline{c}^\epsilon(s)) \leq \inf w^\epsilon + \delta\}$  pour  $\epsilon \in E$  décroissent vers 0 lorsque  $\delta \searrow 0$ .

**Preuve.** L'idée de la démonstration consiste à remarquer que sous  $\text{CLM}_{g,2}$  :

- conditionnellement à  $\mathbf{m}, \mathbf{r}, (\hat{w}^\epsilon, \epsilon \in E(\mathbf{m}))$ , les processus  $w^\epsilon$  sont des ponts browniens indépendants,
- conditionnellement à  $\mathbf{m}, \mathbf{r}, (w^\epsilon, \epsilon \in E(\mathbf{m}))$ , les chemins  $(c^\epsilon, z^\epsilon)$  sont des serpents browniens indépendants.

■

Comme dans la discussion suivant le théorème 7.8, d'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sont définies des variables aléatoires  $(\mathbf{q}_a, (x_a, y_a), D_a)$  de lois respectives  $\mathbf{Q}_g^{(\beta/a)}(d\mathbf{q})\mu_{\mathbf{q}}^{\otimes 2}(dx, dy)|\mathcal{D}(\mathbf{q}, (x, y))|^{-1}\#_{\mathcal{D}(\mathbf{q}, (x, y))}(dD)$  telles que le long de la suite  $(a_n)$  :

1.  $[X_a, a^{-1/4}d_a, \mu_a]$  converge presque sûrement vers  $[X, d, \mu]$ , variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{M}_w$  de loi notée  $\mathcal{S}_g^{(\beta)}d(X, \nu)$ .
2.  $[X_a, a^{-1/4}d_a, (x_a, y_a)]$  converge presque sûrement dans  $\text{PM}_2^*$  vers  $[X, d, (x, y)]$ , variable aléatoire de loi  $\pi_*^1 \mathcal{S}_g^{(\beta)}(dX)\mathbf{m}_2(X, d(x, y))$ , où  $\pi^1 : \text{PM}_w \times (0, \infty) \rightarrow \text{PM}_w$  désigne la projection sur la première coordonnée.
3.  $a^{-1/4}D_a \rightarrow D$  presque sûrement, où conditionnellement à  $d(x, y)$ ,  $D$  suit la loi uniforme sur  $(-d(x, y), d(x, y))$ ,
4. Si  $(\mathbf{m}_a, [\mathbf{l}_a]) = \Psi_{g,2}(\mathbf{q}_a, (x_a, x_a), D_a)$  et  $(\mathbf{m}_a, (w_a, c_a, z_a), t_a^*) = \tilde{\Psi}(\mathbf{q}_a, (x_a, y_a), D_a)$ , presque sûrement,  $\xi^a(\mathbf{m}_a, (w_a, c_a, z_a), t_a^*) \rightarrow (\mathbf{m}, (w, c, z), t^*)$  qui est une variable aléatoire de loi  $\text{CLM}_{g,2}^{(\beta)}$ .

**Esquisse de la preuve du théorème 7.11.** Soit  $\epsilon > 0$  et, grâce à la convergence uniforme de  $\psi^a(l_a^\epsilon)$  vers  $l^\epsilon$ , choisissons  $\eta > 0$  tel que pour tout  $\epsilon$  et  $a$  suffisamment grand (plus grand qu'une constante ne dépendant que de  $\epsilon$ ) :

$$2(8/9)^{1/4}\omega(\psi^a(l_a^\epsilon, \eta)) + \eta + 4a^{-1/4} < \epsilon.$$

Remarquons en premier lieu que  $\mathbf{m}_a$  est constant pour  $a$  assez grand. Ensuite, le deuxième point du lemme 7.16 ainsi que les convergences de  $\phi^a(w_a^\epsilon)$  vers  $w^\epsilon$ , de  $\vartheta^a(c_a^\epsilon)$  vers  $c^\epsilon$  et de  $\tau_a^\epsilon/2a$  vers  $\tau^\epsilon$  impliquent que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\delta \in (0, \eta)$  tel que pour  $a$  suffisamment grand, pour tout  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \text{diam}\{i < \tau_a^\epsilon \quad ; \quad w_a^\epsilon(\mathcal{C}_a^\epsilon(i)) \leq \inf w_a^\epsilon + a^{1/4}\delta/2\} \\ = 2a \text{diam}\{i < \tau_a^\epsilon/2a; \phi^a(w^\epsilon) \left( - \inf_{0 \leq s \leq i} \vartheta^a(c)(s) \right) \leq \inf \phi^a(w^\epsilon) + \delta(9/8)^{1/4}/2\} \\ \leq 2a\eta. \end{aligned}$$

Or le premier point du lemme 7.16 permet d'affirmer que pour  $\delta > 0$  et  $a$  suffisamment grand,  $\min\{w_a(t); \bar{\mathbf{e}}_{\Gamma_a(t)} \in \bar{f}_*\}$  est atteint pour une unique valeur  $i_m$  de  $\Gamma_a(t)$  (où  $w_a$  est défini comme  $w$  en (9)) et que

$$\min\{w_a(t); \bar{\mathbf{e}}_{\Gamma_a(t)} \in \bar{f}_*, \Gamma_a(t) \neq i_m\} > \min\{w_a(t); \bar{\mathbf{e}}_{\Gamma_a(t)} \in \bar{f}_*\} + a^{1/4}\delta/2.$$

Le lemme 7.13 implique alors que pour  $a$  suffisamment grand :

$$\begin{aligned} \text{diam}(\text{medqg}_{x_a y_a}^{a^{-1/4}D_a, \delta}(a^{-1/4}X_a)) &= a^{-1/4} \text{diam}(\text{medqg}_{x_a y_a}^{D_a, \delta a^{1/4}}(X_a)) \\ &\leq a^{-1/4} \left( 2 \max_{\epsilon \in E} \omega(l_a^\epsilon, 2a\eta) + a^{1/4}\delta + 4 \right) \\ &\leq 2(8/9)^{1/4} \max_{\epsilon \in E} \omega(\psi^a(l_a^\epsilon, \eta)) + \eta + 4a^{-1/4}. \end{aligned}$$

Il vient finalement que pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \text{diam}(\text{medqg}_{x_a y_a}^{a^{-1/4}D_a, \delta}(a^{-1/4}X_a)) \leq \epsilon.$$

Le lemme 6.38 nous permet d'en déduire que presque sûrement sous la loi

$$\mathcal{S}_g^{(\beta)}(d(X, \nu))\mathbf{m}_2(X, \cdot) dD \mathbb{1}_{[-d(x,y), d(x,y)]/2d(x,y)},$$

toutes les géodésiques entre  $x$  et  $y$  passent par un unique point  $D$ -médian. Par suite, sous la loi  $\mathcal{S}_g^{(\beta)}(d(X, \nu))\mathbf{m}_2(X, \cdot)$ , pour presque tout  $D$  (au sens de la mesure de Lebesgue), toutes les géodésiques entre  $x$  et  $y$  passent par un unique point  $D$ -médian. Ceci conclut.  $\blacksquare$

## Remerciements

Je voudrais remercier Jean-François Le Gall pour m'avoir proposé un sujet de mémoire passionnant, pour toutes ses explications, en particulier concernant la mesure d'excursion d'Itô, et sa relecture attentive de ce mémoire.

## Références

- [1] P. Billingsley, Convergence of probability measures, second ed., Probability and Statistics, *John Wiley & Sons Inc.* (1999).
- [2] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, A course in metric geometry, Graduate Studies in Math. **33**, *Amerc. Math. Soc* (2001).
- [3] G. Chapuy, M. Marcus, G. Schaeffer, A Bijection for Rooted Maps on Orientable Surfaces, *SIAM J. Discrete Math.* **23**, 1587-1611 (2009).
- [4] P. Chassaing, G. Schaeffer, Random planar lattices and integrated SuperBrownian excursion, *Probab. Theory Related fields*, **128**, 161-212 (2004).
- [5] R. Cori, B. Vauquelin, Planar maps are well labeled trees, *Canad. J. Math.* **33** (5), 1023-1042, 1981.
- [6] S.K. Lando, A.K. Zvonkine, Graphs on surfaces and their applications, *Encyclopedia of Math. Sciences* **141**, Springer (2004).
- [7] J.-F. Le Gall, Large random planar maps and their scaling limits, soumis aux Proceedings 5th European Congress of Mathematics, Amsterdam (2008).
- [8] M. Marcus, G. Schaeffer, Une bijection simple pour les cartes orientables, preprint, <http://www.labri.fr/perso/marcus/Geom/directe.pdf> (2001).
- [9] G. Miermont, Random maps and their scaling limits, in C. Bandt, P. Mörters, M. Zähle (Eds.), Proceedings of the conference Fractal Geometry and Stochastics IV, Greifswald, 2008. *Progress in Probability*, Vol. **61**, 197-224, Birkhäuser (2009).
- [10] G. Miermont, Tessellations of random maps of arbitrary genus, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **42**, fascicule 5, 725-781 (2009).
- [11] G. Schaeffer, Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1998.
- [12] O. Schramm, Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems, in International Congress of Mathematicians, Vol. 1, *Eur. Math. Soc.*, 513-543 (2007).
- [13] T. W. Tutte, A census of planar maps, *Canad. J. Math.* **15**, 249-271 (1963).
- [14] C. Villani, Cours d'intégration et Analyse de Fourier, chapitre 10, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani/Cours/PDFFILES/chap10.pdf>