TD7 – Bouillon mathématique *à ma façon*

1 – Apéritif – Petites questions

0) Quels sont les théorèmes vus en cours avec une hypothèse « σ-fini » ?

1) Pour quels espaces fonctionnels F, G peut-on définir la convolée $f * g$ avec $f \in F, g \in G$?

2 – Entrée – Convolution

Exercice 1. (**Approximation C^∞**)

1. Soient f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$) et φ une fonction de classe C^∞ à support compact. Montrer que la fonction $f * \varphi$ est définie *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ et est de classe C^∞.
2. Soit $\phi : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)\mathbb{1}_{|x|<1}$, montrer que cette fonction est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
3. En déduire que pour tout $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$.

3 – Plat de viande – Dualité $L^p - L^q$

Exercice 2. (**Séquentielle compacité faible**) Soit $p \in]1, \infty[$ et q son exposant conjugué, $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et μ la mesure de Lebesgue. Soit (f_n) une suite bornée de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (*c-à-d* que la suite $(\|f_n\|_p)_{n\geq 1}$ est bornée).

1. Montrer que $\mathbb{L}^q(\Omega)$ est séparable (c'est à dire qu'il contient une partie dénombrable dense).

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2. Soit D une partie dénombrable dense de $\mathbb{L}^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $h \in D$,
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
3. Montrer que pour tout $g \in \mathbb{L}^q(\Omega)$,
$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
4. En déduire qu'il existe $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible* dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})$ vers f, c'est-à-dire :
$$\forall g \in \mathbb{L}^q(\Omega), \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$
5. Le résultat précédent subsiste-t-il pour $p = 1$?

Exercice 3. **(Petit contre-exemple)** Soient $E = \{a, b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = +\infty$. Caractériser $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $\mathbb{L}^1(\mu)$. Conclure.

4 – Plat de poisson – Mesures signées

Exercice 4. **(L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$)**

(i) Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$ est un espace de Banach pour la norme
$$\mu \mapsto \|\mu\|,$$
où $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})|$.
Indication : si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy, on pourra montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)|; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = 0$$
où μ est à déterminer.

(ii) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$:
$$\|f\|_1 = \|f \cdot \mu\|,$$
où $(f \cdot \mu)$ est la mesure absolument continue par rapport à μ de densité f.

5 – Fromage – Pour préparer le partiel à venir

Chercher des exercices des partiels des années précédents (les énoncés sur disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

6 – Dessert – Compléments (hors TD)

Exercice 5. (**Fonctions à variation finie**) Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
   (ii) Il existe une mesure signée μ sur $[a,b]$ telle que $f(x) = \mu([a,x])$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (iii) f est continue à droite et à variation bornée c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante
$$\sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$
2. Donner un exemple de fonction continue $[0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation finie.

Exercice 6. **(Théorème de Vitali-Saks)** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une famille $(\nu_i)_{i\in I}$ de mesures sur $\mathcal{A}$ est dite *absolument équicontinue* par rapport à la mesure μ si :

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \in \mathcal{A}, & \mu(A_\epsilon) < +\infty \text{ et } \forall i \in I, \nu_i(A_\epsilon^c) < \epsilon, \\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, & \mu(A) < \delta \Longrightarrow \forall i \in I, \nu_i(A) < \epsilon \end{cases}$$

On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe stable par intersection finie contenant X. Le but est de prouver le résultat suivant

Théorème de Vitali-Saks.[1] Soit $(\nu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{A}$, absolument équicontinue par rapport à μ et telle que pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\lim_n \nu_n(C)$ existe dans $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \lim_n \nu_n(A)$ existe dans $\mathbb{R}_+$ et ν définit une mesure absolument continue par rapport à μ.

1. Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A}; \nu(A) = \lim_n \nu_n(A) \text{ existe dans } \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par différence propre (c-à-d si $A, B \in \mathcal{B}$ avec $A \subset B$, alors $B \backslash A \in \mathcal{B}$).
2. Soient $(B_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{B}$ et B leur réunion. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k).$$
3. En déduire que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.
4. Montrer que l'application ν est une mesure sur $\mathcal{A}$, absolument continue par rapport à la mesure μ.

Dans l'exercice suivant, on note $(f \cdot \mu)$ la mesure absolument continue par rapport à μ de densité f.

Exercice 7. **(Exercice 2 dans $\mathbb{L}^1$: cas particulier du théorème de Dunford-Pettis)** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe dénombrable stable par intersection finie contenant X.

[1] Contrairement à l'énoncé distribué en TD, il faut que ce soit $\mathbb{R}_+$ et non pas $\overline{\mathbb{R}}_+$ (sinon c'est faux, voir corrigé)

1. Montrer que c'est le cas lorsque X est un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne.

   Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de $\mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (càd la suite $(\|f_n\|_1)_{n\geq 1}$ est bornée) telle que la suite de mesures $(|f_n| \cdot \mu)_{n\geq 1}$ est absolument équicontinue par rapport à μ.

2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ telle que les deux suites de mesures définies par $\nu_n^{\pm} := f_n^{\pm} \cdot \mu$ vérifient : pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\lim_n \nu^{\pm}_{\phi(n)}(C)$ existent dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'il existe $f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ vérifiant pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_{\phi(n)} d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

4. En déduire la *convergence faible* de $f_{\phi(n)}$ vers f :

$$\forall g \in \mathbb{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu), \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_{\phi(n)} g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu.$$

5. Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement au sens de d) (mais pour la suite elle-même) converge-t-elle nécessairement μ-p.p. ou en norme $\|\cdot\|_1$ vers f ? Comparer avec l'exercice 8 du TD3.

Exercice 8. Soit (g_n) une suite de fonctions continues positives sur $I = [0, 1]$. On note λ la mesure de Lebesgue sur I et μ une mesure positive de Borel sur I telle que

1. $\lim_n g_n(x) = 0$ λ-p.p.
2. $\int_I g_n d\lambda = 1$ pour tout $n \geq 1$.
3. $\lim_n \int_I f g_n d\lambda = \int_I f \, d\mu$ pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$.

Peut-on en déduire que μ est étrangère à λ ?