TD6 – Théorèmes de Fubini – Corrigé

0 – Exercice ayant été préparé

Exercice 1. Soient $r, s \in [1, \infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad |g(y)| \leq c|y|^{r/s}. \tag{1}$$

Soit Φ l'application de $\mathbb{L}^r(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{L}^s(X, \mathcal{A}, \mu)$ définie par $\Phi(f) = g \circ f$.

1. Vérifier que $\Phi(f) \in \mathbb{L}^s(X, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Montrer que Φ est continue.
3. Que se passe-t-il si la condition (1) n'est plus satisfaite?

Corrigé:

1. Par hypothèse, pour $f \in \mathbb{L}^r$, $|\Phi(f)(x)|^s = |g(f(x))|^s \leq c^s |f(x)|^r$ est intégrable.
2. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions telle que $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^r} f$. Montrons que $\Phi(f_n) \xrightarrow{\mathbb{L}^s} \Phi(f)$. À cet effet, on utilise le lemme des sous-sous-suites suivant (qui se démontre aisément en raisonnant par l'absurde), et qui parfois de bien précieux services:

   Lemme des sous-sous suites. Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E converge vers $x \in E$ si et seulement de toute suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n \geq 1}$ on peut ré-extraire une sous-suite ψ telle que $(x_{\phi(\psi(n))})_{n \geq 1}$ converge vers x.

   Soit donc ϕ une extractrice fixée. Comme $f_{\phi(n)} \xrightarrow{\mathbb{L}^r} f$, il existe une extractrice ψ et $h \in \mathbb{L}^r$ tels que $f_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} f$ et $|f_{\phi(\psi(n))}| \leq |h|$ pour tout $n \geq 1$. Mais alors:

   $$\left| g(f_{\phi(\psi(n))}) - g(f) \right|^s \quad \xrightarrow{\mu \text{ p.p.}} \quad 0$$

   par continuité de g, et

   $$\left| g(f_{\phi(\psi(n))}) - g(f) \right|^s \leq 2^s (|g(f_{\phi(\psi(n))})|^s + |g(f)|^s) \leq (2c)^s (|h(x)|^r + |f(x)|^r) \quad \in \quad \mathbb{L}^1.$$

   Le théorème de convergence implique:

   $$\int \left| g(f_{\phi(\psi(n))}) - g(f) \right|^s d\mu \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

   ce qui revient à dire que $g(f_{\phi(\psi(n))}) \xrightarrow{\mathbb{L}^s} g(f)$, et conclut la question.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

3. Alors on n'a pas forcément $\Phi(f) \in \mathbb{L}^s$. En effet, considérons une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ telle que $|g(y_n)| > n|y_n|^{r/s}$. Définissons alors la fonction étagée f comme suit:

$$f = \sum_{n\geq 1} y_n \mathbb{1}_{A_n},$$

où les $(A_n)_{n\geq 1}$ sont des boréliens disjoints tels que $\mu(A_n) = 1/(n^{1+s} \cdot |y_n|^r)$. Alors

$$\|f\|_r^r = \sum_{n\geq 1} |y_n|^r \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+s}} < \infty,$$

mais

$$\|g \circ f\|_s^s = \sum_{n\geq 1} |g(y_n)|^s \mu(A_n) > \sum_{n\geq 1} n^s |y_n|^r \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty.$$

□

1 – Petits calculs

0) Expliquer pourquoi il n'y a pas de faute d'orthographe dans le titre du TD6.

Corrigé: deux théorèmes de Fubini ont été vus en cours, dont l'un spécifique aux fonctions à valeurs positives. □

1) Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$ et 0 si $x=y=0$.
Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y)$ et $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y)$. Diabolique, non ?

Corrigé: À x fixé, en remarquant que $y/(x^2+y^2)$ est une primitive de $(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$, il vient:

$$\int_0^1 dy f(x,y) = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc $\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) = \frac{\pi}{4}$ et par symétrie $\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y) = -\frac{\pi}{4}$. De ce fait le théorème de Fubini ne s'applique pas, car f n'est pas dans $\mathbb{L}^1([0,1]^2)$. □

2) En considérant l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx\, dy$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.

Corrigé: Notons $F(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ pour tout $x,y\geq 0$. On a, d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{1+y}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^2y}\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{(1+y)}\frac{\pi}{2\sqrt{y}} = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{2\,du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\,dy\right)dx.$$

Or pour tout $x > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\,dy = \frac{1}{x^2-1}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}\right)dy = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

□

3) En remarquant que $x^{-1}\sin(x) = \int_0^1 \cos(xy)\,dy$, calculer pour tout $t > 0$ l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^{-1}\sin(x)e^{-tx}\,dx.$$

Corrigé: Posons $G(x,y) = \cos(xy)\exp(-tx)$ pour $x \geq 0$, $y \in [0,1]$ et $t > 0$. On a $|G(x,y)| \leq \exp(-tx)$ et $(x,y) \mapsto \exp(-tx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives. Donc G est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et d'après le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\,dx &= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} G(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1\left(\int_{\mathbb{R}_+}\cos(xy)e^{-tx}\,dx\right)dy \\
&= \int_0^1 \frac{t}{y^2+t^2}\,dy \\
&= \arctan\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

□

2 – Théorèmes de Fubini

Exercice 2. **(Truc de ouf)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que

$$\text{pour } \lambda \text{ presque tout } y \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(\{x \in \mathbb{R};\, f(x) = y\}) = 0.$$

Corrigé: On écrit, en utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions positives:

$$\int_{\mathbb{R}} dy\,\lambda(\{x \in \mathbb{R};\, f(x) = y\}) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} dx\,dy\,\mathbb{1}_{\{f(x)=y\}} = \int_{\mathbb{R}} dx\,\lambda(\{y \in \mathbb{R};\, f(x) = y\}) = \int_{\mathbb{R}} 0\cdot dx = 0.$$

Le résultat en découle, car une fonction positive d'intégrale nulle est presque partout nulle.

Autre solution (due à Jaouad Mourtada): Pour $m, n \geq 1$, on note

$$A_{m,n} = \left\{y \in \mathbb{R};\, \lambda(\{f^{-1}(\{y\}) \cap [-m,m]\}) > \frac{1}{n}\right\}.$$

Il est facile de voir que $A_{m,n}$ est fini. Ainsi:

$$\{y \in \mathbb{R};\, \lambda(\{x \in \mathbb{R};\, f(x) = y\}) > 0\} = \bigcup_{m,n\geq 1} A_{m,n}$$

est dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. Ceci conclut.

□

Exercice 3. **(Quelque chose d'utile)** Sur un espace mesuré σ-fini $(E,\mathcal{A},\mu)$, on considère $f:(E,\mathcal{A},\mu)\to(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable

1. Soit $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0)=0$. Montrer que
$$\int_E g\circ f\,d\mu=\int_0^{+\infty}g'(t)\mu(\{f\geq t\})\,dt.$$
Indication: On pourra écrire $g(f(t))$ comme une intégrale.
2. Montrer que $\int_E f\,d\mu=\int_0^{\infty}\mu\{f\geq t\}dt.$
3. On suppose que μ est finie et qu'il existe $p\geq 1$ et $c>0$ tels que pour tout $t>0$, $\mu(\{|f|>t\})\leq ct^{-p}$. Montrer que $f\in\mathbb{L}^q(E,\mathcal{A},\mu)$ pour tout $q\in[1,p[$. A-t-on forcément $f\in\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$?

Corrigé:

1. La fonction $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g(0)=0$ donc pour tout $x\in E$ on a
$$g(f(x))=\int_0^{f(x)}g'(s)\,ds.$$
On a donc
$$\int_E g\circ f\,d\mu=\int_E\int_{\mathbb{R}_+}g'(s)\mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}\,ds\,d\mu(x).$$
Et la fonction $F:(x,s)\in E\times\mathbb{R}_+\mapsto g'(s)\mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}$ est positive. Donc d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives (Fubini-Tonelli), on a
$$\int_E g\circ f\,d\mu=\int_{\mathbb{R}_+}g'(s)\int_E\mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}\,d\mu(x)\,ds=\int_{\mathbb{R}_+}g'(s)\mu(\{f\geq s\})\,ds.$$
2. Application immédiate de la question précédente en prenant $g(x)=x$.
3. On applique la question 1. avec $|f|$ et $g(x)=x^q$ (pour passer de $\mu(\{|f|>t\})$ à $\mu(\{|f|\geq t\})$, on remarque qu'on peut remplacer $\{s\leq f(x)\}$ par $\{s<f(x)\}$ dans la solution de la question 1):
$$\int_E|f|^q d\mu=q\int_0^{\infty}t^{q-1}\mu(\{|f|\geq t\})dt\leq q\mu(E)+cq\int_1^{\infty}t^{q-p-1}dt<\infty,$$
car $q-p-1<-1$. En revanche, on n'a pas forchément $f\in\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$: prendre par exemple $f=t^{-1/p}$ sur $]0,1]$.

   Remarque. Si $f\in\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$, l'inégalité de Markov implique qu'il existe $c>0$ telsque pour tout $t>0$, $\mu(\{|f|>t\})\leq ct^{-p}$.

Exercice 4. **(Inégalité de Hardy)** Soient $(X,\mathcal{X},\mu)$ et $(Y,\mathcal{Y},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. On considère $\varphi:(X\times Y,\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure produit $\mu\otimes\nu$, et F la fonction définie pour μ-p.t. $x\in X$ par $F(x)=\int_Y\varphi(x,y)\nu(dy)$.

1. Montrer que F vérifie l'inégalité $\|F\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \leq \int_Y \|\varphi(.,y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \nu(dy)$.

2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ avec $p \in]1,\infty[$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, vérifie l'inégalité suivante (appelée inégalité de Hardy): $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Corrigé:

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $X = \cup_{n\geq 1} X_n$ et telle que $\mu(X_n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$. On note $\Gamma_n = X_n \cap \{|F| \leq n\}$. On a:

$$\begin{aligned}
\int_X |F(x)|^p \mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx) &\leq \int_X |F(x)|^{p-1}\left(\int_Y |\varphi(x,y)|\nu(dy)\right)\mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx) \\
&= \int_Y \nu(dy)\left(\int_X |F(x)|^{p-1}|\varphi(x,y)|\mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx)\right) \qquad \text{(Fubini-Tonnelli)} \\
&\leq \int_Y \nu(dy)\left(\int_X |F(x)|^p \mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx)\right)^{1-\frac{1}{p}} \|\varphi(.,y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \qquad \text{(Hölder).}
\end{aligned}$$

Or $\int_X |F(x)|^p \mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx) < \infty$. On en déduit que (on voit ici l'intérêt d'introduire Γ_n, sinon on n'aurait pas pu diviser par une quantitié pouvant être infinie):

$$\left(\int_X |F(x)|^p \mathbb{1}_{\Gamma_n}\mu(dx)\right)^{1/p} \leq \int_Y \nu(dy)\varphi(\cdot,y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}.$$

Mais la suite de fonctions $(\mathbb{1}_{\Gamma_n})_{n\geq 1}$ tend simplement en croissant vers la fonction constante égale à un. D'après le théorème de convergence monotone, il vient:

$$\left(\int_X |F(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leq \int_Y \nu(dy)\varphi(\cdot,y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}.$$

2. On remarque que
$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(xy)dy.$$
Il est tentant de prendre $\phi(x,y) = f(xy)$, mais cette fonction n'est pas nécessairement intégrable. On procède donc par approximation comme à la question précédente. Plus précisément, on applique la question 1. aux fonctions
$$\phi_n(x,y) = \mathbb{1}_{[1/n,n]}(x)|f(xy)|,$$
et $G_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} \phi_n(x,y)dx$. Vérifions pour cela que chaque ϕ_n est intégrable. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives:

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times [0,1]} \phi_n(x,y)dxdy = \int_{1/n}^n \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt\right)dx \leq \int_{1/n}^n \frac{dx}{x}\int_0^n |f(t)|dt < \infty.$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\|G_n\|_p \leq \int_{[0,1]} \|\phi_n(\cdot,y)\|_p dy,$$

et

$$\|\phi_n(\cdot,y)\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(xy)|^p dx = \frac{1}{y}\|f\|_p^p.$$

On a donc

$$G_n\|_p \le \|f\|_p \int_{[0,1]} \frac{1}{y^{1/p}} dy = \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Puis, par le théorème de convergence, on en déduit que

$$\|G\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p,$$

où $G : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|dt$. Enfin on remarque que $\|F\|_p \le \|G\|_p$, ce qui conclut. □

3 – Convolution, transformée de Fourier

Exercice 5. **(Transformée de Fourier)** Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ on note sa transformée de Fourier $\hat{f}(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}dx$.

1. Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
2. Soient $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$.
3. En déduire que $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour la convolution.

Corrigé:

1. Voir corrigé dans le Polycopié de J.F. Le Gall p 52.
2. Par définition on a

$$\widehat{f * g}(t) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ixt} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i(x-y)t} e^{-iyt} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

   Puisque $\int\int |f(x-y)||g(y)|dxdy \le \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty$, le théorème de Fubini s'applique et le changement de variable $x - y = z$ donne le résultat escompté.

3. Si $e \in \mathbb{L}^1$ est un élément neutre pour la convolution alors

$$\forall f \in \mathbb{L}^1, \forall t \in \mathbb{R}, \widehat{f * e}(t) = \hat{f}\hat{e}(t) = \hat{f}(t).$$

   Or il n'est pas difficile de trouver une fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (voir par exemple l'exercice suivant). On en déduit donc que $\hat{e}(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ce qui est en contradiction avec la première question. □

Exercice 6. **(Super Hölder)**

1. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout et que $\|f * g\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q$.

   Indication :

$$|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p|g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)^p|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

2. Soit $f \in \mathbb{L}^1$ et $g \in \mathbb{L}^p$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $|a| < \|f\|_1^{-1}$ l'équation $h - af * h = g$ possède une unique solution dans $\mathbb{L}^p$.

Corrigé:

1. On utilise l'inégalité généralisée de Hölder

$$\left(\int f_1 f_2 f_3\right) \leq \left(\int f_1^{1/\alpha}\right)^{\alpha} \left(\int f_2^{1/\beta}\right)^{\beta} \left(\int f_3^{1/\gamma}\right)^{\gamma},$$

pour $\alpha, \beta, \gamma \in]0,1[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ici on pose $\alpha = \frac{1}{r}, \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ et $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$ alors l'indication amène à

$$\int |f(x-y)g(y)| dy \leq \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int |f(x-y)|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int |g(y)|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}.$$

D'où

$$\|f * g\|_r^r \leq \underbrace{\int\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dx dy}_{\leq \|f\|_p^p \|g\|_q^q} \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q},$$

ce qui permet de conclure.

2. On considère l'application $\Phi : h \in \mathbb{L}^p \mapsto af * h + g$. Alors d'après la question précédente

$$\|\Phi(h) - \Phi(h')\|_p \leq a \|f\|_1 \|h - h'\|_p,$$

est une contraction de $\mathbb{L}^p$. Cet espace est complet, donc Φ admet un unique point fixe, ce qui résoud la question. □

3 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. On définit une fonction $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ par

- $\mu(A) = 0$ si A est une partie finie ou dénombrable,
- $\mu(A) = +\infty$ sinon.

Soit K l'espace triadique de Cantor défini par $K = \left\{\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} : (a_n)_{n\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}\right\}$. On rappelle que K est un compact de $[0,1]$, infini non-dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle. On pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in K\}$.

1. Vérifier que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Calculer les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y) \mu(dy)\right) dx$ et $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y) dx\right) \mu(dy)$. Conclure.

Corrigé:

1. L'ensemble vide $\varnothing$ est considéré comme fini donc $\mu(\varnothing) = 0$. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de parties de $\mathbb{R}$ disjointes finies ou dénombrables alors $\cup_{n\geq 0} A_n$ est finie ou dénombrable et donc
$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = 0 = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$
Si $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une suite dont au moins une des parties est infinie non-dénombrable alors $\cup_{n\geq 0} A_n$ est infinie non-dénombrable et donc
$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = +\infty = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

2. L'ensemble K est compact donc C est fermé. Ainsi $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

3. On a
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\,\mu(dy)\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \mu(x-K)\,dx = +\infty,$$
car $x-K$ est non-dénombrable et
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x,y)\,dx\right) \mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(K-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \lambda(K)\,dy = 0.$$
On a ici un exemple où le théorème de Fubini pour les fonctions positives s'applique pas, la mesure μ n'est pas σ-finie. $\square$

Exercice 8. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{A})$. Soient f et g deux fonctions $(\mathbb{R},\mathcal{A}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f, g et fg sont dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{A},\mu)$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fg\,d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu \int_{\mathbb{R}} g\,d\mu$.
Indication : on pourra considérer la fonction $F(x,y) = (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$.

Corrigé: La fonction F est positive donc $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) \geq 0$. De plus, $f,g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,
$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)||g(y)|\,d\mu(x)\,d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} |f|\,d\mu \int_{\mathbb{R}} |g|\,d\mu < \infty.$$
Ainsi, la fonction $(x,y) \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. De même $fg \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et μ est une mesure de probabilité, donc $(x,y) \mapsto f(x)g(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. On peut donc écrire
$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) = 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(x)\,d\mu(x)\,d\mu(y) - 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$
Et d'après le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables (Fubini-Lebesgue), on a
$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(x)\,d\mu(x)\,d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\left(\int_{\mathbb{R}} d\mu(y)\right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} fg\,d\mu,$$
et
$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu \int_{\mathbb{R}} g\,d\mu,$$
ce qui nous donne le résultat. $\square$

Exercice 9. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.

2. Soit $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\})$.

Corrigé:

1. Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{R} = \cup_{n\geq 0} E_n$ et telle que $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 0$. On note $D_n = \{x \in E_n : \mu(x) \geq 1/n\}$. Si D_n est infini alors il contient une suite $(y_m)_{m\geq 1}$ et

$$\mu(E_n) \geq \mu(D_n) \geq \mu(\{y_m, m \geq 1\}) = \sum_{m\geq 1} \mu(\{y_m\}) \geq \sum_{m\geq 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

ce qui est impossible. On en déduit donc que D_n est fini. Puis $D = \cup_{n\geq 0} D_n$ est fini ou dénombrable.

2. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives on a

$$\begin{aligned}
\mu\otimes\nu(\Delta) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Delta(x,y)\,\mu(dx)\nu(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu(\{y\})\,\nu(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{x\in D_\mu} \mu(\{x\})\mathbb{1}_{\{x=y\}}\,\nu(dy) \\
&= \sum_{x\in D_\mu} \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\})\mathbb{1}_{\{x=y\}}\,\nu(dy) \\
&= \sum_{x\in D_\mu\cap D_\nu} \mu(\{x\})\nu(\{x\}) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).
\end{aligned}$$

□

Pour l'exercice suivant on rappelle les deux théorèmes classiques :

- Théorème d'Ascoli : Soit X et Y deux espaces métriques compacts, et A une partie de l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ des fonctions continues de $X \longrightarrow Y$ muni de la convergence uniforme. Alors A est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$ (*i.e.* sa fermeture est compacte) si elle est équi-continue *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\mathrm{d}_X(x,x') \leq \delta \Rightarrow \forall f \in A, \mathrm{d}_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon).$$

- Pré-compacité : Soit (E,d) un espace métrique complet. Les parties $A \subset E$ relativement compactes sont exactement les parties pré-compactes *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \exists \text{ un recouvrement de } A \text{ par } n_\varepsilon \text{ parties de diamètre } \leq \varepsilon.$$

Pour $h > 0$ et une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on rappelle que $\tau_h f$ désigne l'application $\tau_h f(x) = f(x-h)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. **(Riesz-Fréchet-Kolmogorov : un critère de compacité dans $\mathbb{L}^p$.)** On veut montrer le résultat suivant. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (avec $1 \leq p < \infty$) vérifiant :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon$,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $\delta \in]0, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)[$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} < \varepsilon$ pour tous $|h| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$;

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (c'est-à-dire d'adhérence compacte dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$). La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω.

1. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité telle que chaque ρ_n est de classe C^∞ et de support inclus dans $[-1/n, 1/n]$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{f}$ la fonction f prolongée à tout $\mathbb{R}$ par 0.
   (a) Montrer en utilisant le théorème d'Ascoli que pour tout $n \geq 1$, la famille $\mathcal{F}_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\omega} : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.
   (b) Montrer que pour tout n assez grand, $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon$.
   (c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de $\mathbb{L}^p(\omega)$ de rayon 2ε.
2. Conclure.

Corrigé:

1. On note M un majorant de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$.
   (a) Soit $n \geq 1$ fixé. On note $\mathcal{F}'_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\overline{\omega}} : f \in \mathcal{F}\}$ Tout d'abord on a $\mathcal{F}'_n \subset \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \overline{\omega}$, d'après l'inégalité de Jensen (appliquée à la mesure de probabilité $\rho_n(y)dy$), on a

$$\begin{aligned} \left|\tilde{f} * \rho_n(x)\right| &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x-y)|^p \rho_n(y)\, dy\right)^{1/p} \\ &\leq (\|\rho_n\|_\infty)^{1/p} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \\ &\leq (\|\rho_n\|_\infty)^{1/p} M. \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{F}'_n$ est une famille bornée de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Et pour $x, x' \in \overline{\omega}$, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(x')| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)(\rho_n(x-y) - \rho_n(x'-y))dy\right| \\ &\leq \|\rho'_n\|_\infty |x-x'| \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}|\, d\lambda \\ &\leq \|\rho'_n\|_\infty |x-x'| \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \lambda(\Omega)^{1-1/p} \\ &= C_n |x-x'|. \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{F}'_n$ est une famille équicontinue de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{F}'_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Or pour $g \in \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$, on a $g_{|\omega} \in \mathbb{L}^p(\omega)$ et $\|g_{|\omega}\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq (\lambda(\omega))^{1/p} \|g\|_\infty$. Donc l'injection de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^p(\omega)$ est continue. Ainsi, $\mathcal{F}_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.

(b) Soit δ associé à ε et ω par la propriété (ii). Soit $n_0 \geq \delta^{-1}$. Pour $n \geq n_0$, $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \omega$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{f} * \rho_n(x) - f(x)\right|^p &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{f}(x-y) - f(x)\right)\rho_n(y)\,dy\right|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(x-y) - f(x)\right|^p \rho_n(y)\,dy \\
&= \int_{[-1/n,1/n]} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\,dy,
\end{aligned}$$

donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f} * \rho_n - f\|^p_{\mathbb{L}^p(\omega)} &\leq \int_\omega \int_{[-1/n,1/n]} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\,dy\,dx \\
&= \int_{[-1/n,1/n]} \int_\omega |f(x-y) - f(x)|^p\,dx\,\rho_n(y)\,dy \\
&= \int_{[-1/n,1/n]} \|\tau_y f - f\|^p_{\mathbb{L}^p(\omega)} \rho_n(y)\,dy \\
&\leq \varepsilon^p \int_{[-1/n,1/n]} \rho_n(y)\,dy \\
&= \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour $n \geq n_0$,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

(c) La famille $\mathcal{F}_{n_0}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$ donc on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε. D'après la question (b), ces mêmes boules de rayon 2ε recouvrent $\mathcal{F}$.

2. Comme $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est complet, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon/2$. Et d'après la question (1), $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par des boules $B(g_i, \varepsilon/2), i = 1, \ldots, k$ (de $\mathbb{L}^p(\omega)$). On note G_i les fonctions g_i prolongées à Ω par 0. Alors les boules $B(G_i, \varepsilon), i = 1, \ldots, k$ (de $\mathbb{L}^p(\Omega)$) recouvrent $\mathcal{F}$. □