TD3 – Intégration, théorèmes de convergence

1 – Petites questions

1) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, avec $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ pour tout n, qui converge simplement vers 0. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

2) On définit sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et une fonction mesurable f telle que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$. On suppose que

$$\sup_{n\geqslant 0} \int_E |f_n|\, d\mu < \infty.$$

Montrer que f est intégrable.

3) (Inégalité de Markov) Soit $f \in \mathscr{L}_1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que pour tout $A > 0$,

$$\mu(\{|f| \geqslant A\}) \leqslant \frac{1}{A}\int_E |f| d\mu.$$

4) Soit $f \in \mathscr{L}_1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$. Que dire de la réciproque?

2 – Intégration, théorèmes de convergence

Exercice 1.

1) Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$, de dérivée f' bornée. Prouver que

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0).$$

2) $(\star)$ Trouver une fonction continue presque partout dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $\int_0^1 f'(x)dx = 0$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Exercice 2 (Borel-Cantelli is back). Soient $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

Indication donnée à titre indicatif : on pourra considérer, pour $\eta > 0$, les ensembles

$$A_{\eta,n} = \{x \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(nx)| > \eta\}, \ n \geqslant 1.$$

Exercice 3 (Uniforme continuité de l'intégrale).
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.

1) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu = 0.$$

2) Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall A \in \mathcal{A}, \ \ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

3) Si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, que peut-on dire de la fonction $F : u \to \int_{[0,u]} f d\lambda$?

Exercice 4 (Problème: convergence en mesure).
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite (f_n) converge vers f en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(|f - f_n| > \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

1. Montrer que si $\int_E |f - f_n| d\mu \to 0$, alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

2. Montrer que si $f_n \to f$ μ-p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

3. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une suite de (f_n) qui converge μ-p.p. vers f.

4. *Un théorème de convergence dominée plus fort.* On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leqslant g$ μ-p.p. pour tout $n \geqslant 1$.

   (a) Montrer que $|f| \leqslant g$ μ-p.p.

   (b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que

   $$\int_E |f_n - f| d\mu \to 0.$$

5. *L'espace* $\mathbf{L}^0(E,\mu)$. On note $\mathbf{L}^0(E,\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.

   (a) Montrer que l'on définit une distance sur $\mathbf{L}^0(E,\mu)$ par
   $$\delta(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0, \mu(|f-g| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon\}$$
   et que celle-ci métrise la convergence en mesure.

   (b) Montrer que $(\mathbf{L}^0(E,\mu), \delta)$ est complet.

   (c) Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbf{L}^0(E,\mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p.

Exercice 5.
Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Quelle est la limite de la suite
$$\left(\int_0^1 f(x^n)dx\right)_{n\geqslant 1} ?$$

3 – À préparer pour la prochaine fois

Exercice 6.

1. Dans le lemme de Fatou, montrer que si l'on remplace $\liminf$ par $\limsup$, $f_n \geqslant 0$ par $f_n \leqslant 0$ et $\geqslant$ par $\leqslant$, le théorème reste vrai. Montrer en revanche, à l'aide de contre-exemples, qu'on ne peut pas se permettre d'en changer certains mais pas les autres.

2. Donner un exemple de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ pour lesquelles l'inégalité est stricte dans le lemme de Fatou.

3. Dans le théorème de convergence dominée, vérifier, en donnant des exemples et contre-exemples, que si l'on oublie une hypothèse la conclusion peut rester vraie, ou pas !

4. Reprendre la question précédente avec le théorème de convergence monotone.

5. Soit (f_n) une suite de fonctions positives convergeant μ-pp vers f. Supposons que $\int f_n d\mu \longrightarrow c < \infty$. Montrer que $\int f d\mu$ est définie est appartient à $[0,c]$ mais ne vaut pas nécessairement c.

6. Construire une suite de fonctions continues f_n sur $[0,1]$, avec $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, et telle que
   $$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$
   sans toutefois que la suite $(f_n(x))$ ne converge pour aucun x de $[0,1]$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie et $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que:

$$f \in \mathscr{L}_1(X, \mathcal{A}, \mu) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n \geqslant 1} \mu(\{|f| \geqslant n\}) < \infty.$$

Que se passe-t-il si la masse totale est infinie?

Exercice 8 (Quand est-ce que convergence p.p. implique convergence dans $\mathscr{L}_1$?)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$. Une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ est dite **uniformément intégrable** si

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|f_i| \geqslant c\}} |f_i| d\mu = 0.$$

a) Montrer que toute famille finie de $\mathscr{L}_1(E, \mathcal{A}, \mu)$ (noté $\mathscr{L}_1(\mu)$ dans la suite) est uniformément intégrable.

b) Montrer que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites:

   (i) $\sup\{\int |f_i| d\mu, i \in I\} < \infty$

   (ii) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mu(A) < \eta \Longrightarrow \forall\, i \in I, \int_A |f_i| d\mu < \varepsilon.$

c) Montrer que si les familles $(f_i)_{i \in I}$ et $(g_i)_{i \in I}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour la famille $(f_i + g_i)_{i \in I})$.

d) Soit $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions qui converge μ-p.p. vers une fonction f. Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, $f \in \mathscr{L}_1(\mu)$ et

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Exercice 9 ($\star$)**.** Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable telle que

$$\int_E |\mathbb{1}_{A_n} - f| \, d\mu \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \mathbb{1}_A$, μ presque partout.

Fin