Exercices additionels : Radon–Nikodym et mesures

1 – Théorème de Radon–Nikodym

Exercice 1. **(Contre-Exemple à R-N)** Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ c'est-à-dire que $m(A) = \#A$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$. On note m_0 la restriction de m à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à m_0.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot m_0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.
3. Conclure quelque chose d'intelligent et intelligible.

Exercice 2. **(Quantification de l'absolue continuité)** Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,
$$\mu(A) \leq \eta \implies \nu(A) \leq \varepsilon.$$
Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie. Que se passe-t-il si ν est infinie ?

2 – Mesures

Exercice 3. **(Le retour du diable)** On construit récursivement une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ comme suit. On pose $f_0(x) = x$ pour $x \in [0,1]$. On construit f_{n+1} à partir de f_n en remplaçant f_n, sur chaque intervalle maximal $[u,v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction linéaire par morceaux qui vaut $(f_n(u) + f_n(v))/2$ sur $\left[\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}, \frac{2v}{3} + \frac{u}{3}\right]$.

1. Verifier que $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$ et $x \in [0,1]$. En déduire que f_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue notée f_{diable}.
2. Soit μ_{diable} la mesure sur $[0,1]$ définie comme étant la mesure de Stieljes associée à f_{diable}. Montrer que μ_{diable} est étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue. La mesure μ_{diable} a-t-elle des atomes ?

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Exercice 4. **(L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$)**

(i) Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$ est un espace de Banach pour la norme
$$\mu \mapsto \|\mu\|,$$
où $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$:
$$\|f\|_1 = \|f \cdot \mu\|,$$
où $(f \cdot \mu)$ est la mesure absolument continue par rapport à μ de densité f.

3 – Dualité $\mathbb{L}^p - \mathbb{L}^q$

On rappelle le résultat suivant, appelé *dualité* $\mathbb{L}^p - \mathbb{L}^q$. Soit ν une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$, soit $p \in [1, \infty[$ et soit q l'exposant conjugé de p. Alors, si Φ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \nu)$, il existe une unique application $g \in \mathbb{L}^q(E, \mathcal{A}, \nu)$ telle que pour tout $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \nu)$, $\Phi(f) = \int f g d\nu$. De plus la norme d'opérateur de Φ est $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

Exercice 5. (**Séquentielle compacité faible**) Soit $p \in]1, \infty[$ et q son exposant conjugué, $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et μ la mesure de Lebesgue. Soit (f_n) une suite bornée de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (*c-à-d* que la suite $(\|f_n\|_p)_{n \geq 1}$ est bornée).

1. Montrer que $\mathbb{L}^q(\Omega)$ est séparable (c'est à dire qu'il contient une partie dénombrable dense).
2. Soit D une partie dénombrable dense de $\mathbb{L}^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $h \in D$,
$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
3. Montrer que pour tout $g \in \mathbb{L}^q(\Omega)$,
$$\phi(g) = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
4. En déduire qu'il existe $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible* dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})$ vers f, c'est-à-dire :
$$\forall g \in \mathbb{L}^q(\Omega), \qquad \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$
5. Le résultat précédent subsiste-t-il pour $p = 1$?

Exercice 6. **(Petit contre-exemple)** Soient $E = \{a, b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = +\infty$. Caractériser $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $\mathbb{L}^1(\mu)$. Conclure.

4 – Pour préparer le partiel à venir

Chercher des exercices des partiels des années précédents (les énoncés sur disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. (**Fonctions à variation finie**) Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
   (ii) Il existe une mesure signée μ sur $[a,b]$ telle que $f(x) = \mu([a,x])$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (iii) f est continue à droite et à variation bornée c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante
$$\sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$
2. Donner un exemple de fonction continue $[0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation finie.

Exercice 8. **(Théorème de Vitali-Saks)** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une famille $(\nu_i)_{i\in I}$ de mesures sur $\mathcal{A}$ est dite *absolument équicontinue* par rapport à la mesure μ si :

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \in \mathcal{A}, & \mu(A_\epsilon) < +\infty \text{ et } \forall i \in I, \nu_i(A_\epsilon^c) < \epsilon, \\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, & \mu(A) < \delta \Longrightarrow \forall i \in I, \nu_i(A) < \epsilon \end{cases}$$

On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe stable par intersection finie contenant X. Le but est de prouver le résultat suivant

Théorème de Vitali-Saks. Soit $(\nu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{A}$, absolument équicontinue par rapport à μ et telle que pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\lim_n \nu_n(C)$ existe dans $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \lim_n \nu_n(A)$ existe dans $\mathbb{R}_+$ et ν définit une mesure absolument continue par rapport à μ.

1. Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A}; \nu(A) = \lim_n \nu_n(A) \text{ existe dans } \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par différence propre (c-à-d si $A, B \in \mathcal{B}$ avec $A \subset B$, alors $B \backslash A \in \mathcal{B}$).
2. Soient $(B_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{B}$ et B leur réunion. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k).$$
3. En déduire que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.
4. Montrer que l'application ν est une mesure sur $\mathcal{A}$, absolument continue par rapport à la mesure μ.

Dans l'exercice suivant, on note $(f \cdot \mu)$ la mesure absolument continue par rapport à μ de densité f.

Exercice 9. **(Exercice 5 dans $\mathbb{L}^1$: cas particulier du théorème de Dunford-Pettis)** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe dénombrable stable par intersection finie contenant X.

1. Montrer que c'est le cas lorsque X est un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne.

   Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de $\mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (càd la suite $(\|f_n\|_1)_{n\geq 1}$ est bornée) telle que la suite de mesures $(|f_n| \cdot \mu)_{n\geq 1}$ est absolument équicontinue par rapport à μ (voir l'exercice précédent pour une définition).

2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ telle que les deux suites de mesures définies par $\nu^{\pm} := f_n^{\pm} \cdot \mu$ vérifient : pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\lim_n \nu^{\pm}_{\phi(n)}(C)$ existent dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe $f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ vérifiant pour tout $A \in \mathcal{A}$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A f_{\phi(n)} d\mu = \int_A f \, d\mu$.
4. En déduire la *convergence faible* de $f_{\phi(n)}$ vers f : $\forall g \in \mathbb{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_{\phi(n)} g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu$.
5. Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement au sens de 4. (mais pour la suite elle-même) converge-t-elle nécessairement μ-p.p. ou en norme $\|\cdot\|_1$ vers f ? Comparer avec l'exercice 9 du TD4.

Fin