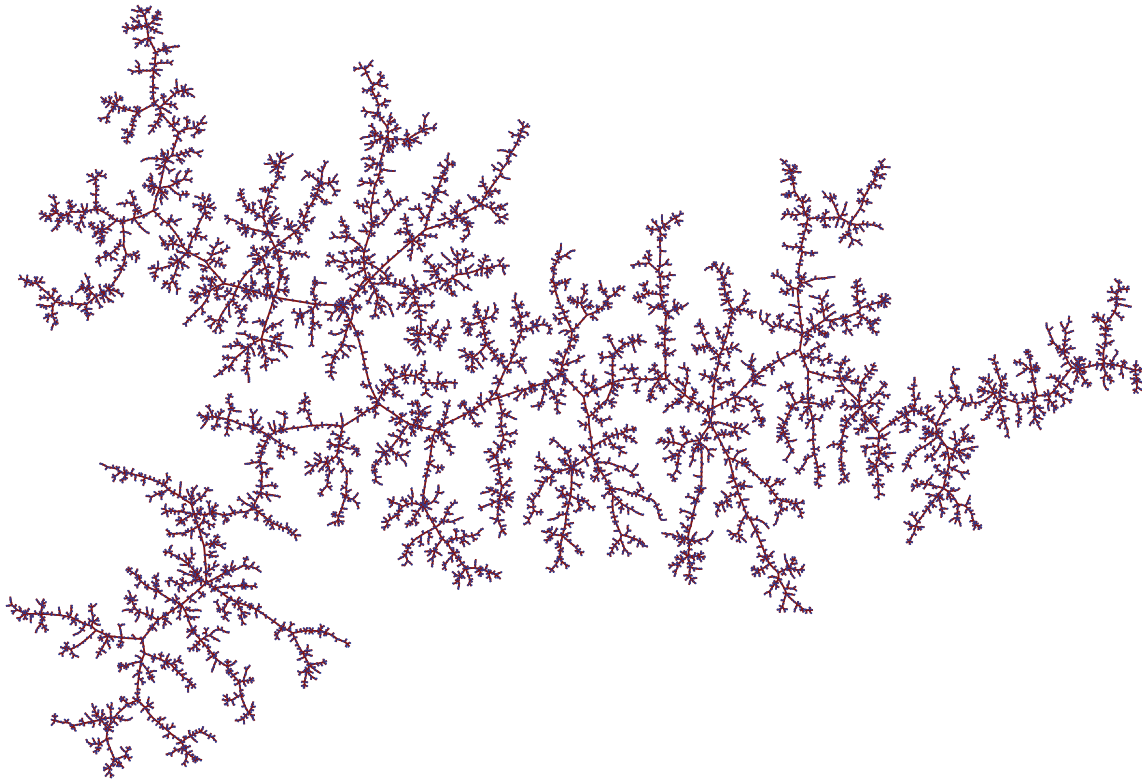


Leçon de mathématiques

Arbres aléatoires : thème et variations

Le but de cette leçon est d'étudier la géométrie d'une classe particulière d'arbres planaires aléatoires : les arbres de Galton–Watson.



Résumé du mini-cours

Étant donnée une mesure de probabilité μ sur les entiers positifs, un **arbre de Galton–Watson** de loi de reproduction μ est informellement défini comme suit : d'une part la racine de l'arbre a un nombre aléatoire d'enfants distribué selon la loi μ , et d'autre part, les nombres d'enfants des enfants de la racine sont des variables aléatoires indépendantes de loi commune μ , et ainsi de suite.

La partie cours présentera différentes techniques combinatoires et probabilistes intervenant de manière importante non seulement dans l'étude des arbres de Galton–Watson mais également dans d'autres situations en probabilités. Avec grande probabilité, les éléments abordés seront :

– Calcul de la probabilité d’extinction en fonction de μ (ces arbres ont été introduits à la fin du XIX^{ème} siècle par Bienaymé, Galton et Watson pour étudier la probabilité d’extinction de noms nobles en Angleterre).

– Dénombrement d’arbres via des méthodes de fonctions génératrices. Utilisation de théorèmes d’analyse complexe en combinatoire : théorème d’inversion de Lagrange (qui permet de retrouver les coefficients d’une série entière $F(z)$ à partir d’une équation implicite vérifiée par $F(z)$), méthodes de transfert (qui permettent d’obtenir un équivalent asymptotique des coefficients d’une série entière $F(z)$ à partir de singularités de $F(z)$).

– Codage d’arbres de Galton–Watson par des marches aléatoires. Théorème Local Limite (qui permet d’obtenir des estimées sur le comportement local d’une marche aléatoire $(W_n)_{n \geq 0}$, par exemple des estimées de type $\mathbb{P}[W_n = 0] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} c/\sqrt{n}$. Théorème d’invariance de Donsker (convergence de marches aléatoires, convenablement renormalisées, vers le mouvement brownien).



Les exposés sont répartis suivant trois thématiques :

- On commence par étudier un problème dont l’énoncé ne fait pas intervenir d’arbres, mais où l’utilisation d’arbres permet de répondre à plusieurs questions.

- Le deuxième exposé concerne l’étude des propriétés globales d’arbres de Galton–Watson.

- Si on note Z_n le nombre de sommets à la génération n , le processus $(Z_n)_{n \geq 0}$ est appelé **processus de Galton–Watson**. Le troisième exposé s’intéresse au comportement de Z_n lorsque $n \rightarrow \infty$.

- Le dernier exposé explore les liens entre arbres de Galton–Watson et mouvement brownien.



Exposés

Exposé 1 : étude des dissections uniformes

D’après l’article “Random non-crossing plane configurations : A conditioned Galton–Watson tree approach” de Curien & Kortchemski.

On se pose la question suivante : à quoi ressemble une dissection “typique” ? Par définition, une **dissection** d’un polygone régulier est la donnée de ses côtés et d’une collection de diagonales qui ne peuvent pas s’intersecter intérieurement. De manière un peu plus précise, soit \mathcal{D}_n une dissection, choisie uniformément au hasard parmi toutes celles du polygone régulier à n côtés.

On utilisera le fait que le dual de \mathcal{D}_n est un arbre de Galton–Watson conditionné (voir Fig. 1).

On montrera la convergence de ces arbres d’aux vers un certain arbre infini aléatoire qu’on introduira, appelé **l’arbre de Galton–Watson conditionné à survivre**, et on expliquera comment utiliser cette convergence pour étudier \mathcal{D}_n .



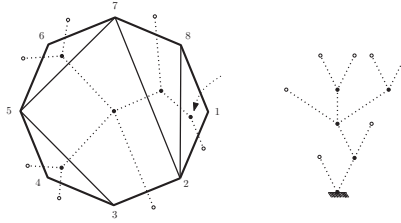


FIGURE 1 – Une dissection et son arbre dual.

Exposé 2 : théorèmes limites pour les processus de Galton-Watson conditionnés

D'après l'article "Elementary New Proofs of Classical Limit Theorems for Galton-Watson Processes" de Geiger.

Le but de cet exposé est de prouver les résultats suivants (par une méthode plus simple que la méthode originelle) :

Théorème (Kolmogorov). On suppose que $\mathbb{E}[Z_1] = 1$ et que $\sigma^2 := \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 < \infty$. Alors :

$$\mathbb{P}[Z_n > 0] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\sigma^2} \frac{1}{n}.$$

Théorème (Zubkov). On suppose que $\mathbb{E}[Z_1] = 1$ et que $\sigma^2 := \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 < \infty$. Notons G_n la génération du plus jeune ancêtre commun à tous les individus présents à la génération n . Alors pour tout $0 \leq u \leq 1$:

$$\mathbb{P}\left[\frac{G_n}{n} \leq u \mid Z_n > 0\right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u,$$

ce qui signifie que conditionnellement à la non-extinction à la génération n , G_n/n converge en loi vers une variable uniforme.

L'idée est de décomposer l'arbre suivant la lignée généalogique de l'individu "le plus à gauche" vivant à l'instant n .



Exposé 3 : comportement asymptotique des processus de Galton-Watson

D'après "Probability on Trees and Networks" de Lyons & Peres.

Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ le processus de Galton-Watson introduit dans le résumé du mini-cours. Comment se comporte Z_n lorsque $n \rightarrow \infty$?

Notons $m = \mathbb{E}[Z_1]$. On commencera par montrer que $(Z_n/m^n)_{n \geq 1}$ est une martingale positive, qui converge donc p.s. vers une variable aléatoire notée W . Le but de ces exposés est de prouver le résultat suivant :

Théorème (Kesten & Stigum). On suppose $m > 1$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathbb{P}[W = 0] = \mathbb{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0]$,
- (ii) $\mathbb{E}[W] = 1$,

$$(iii) \mathbb{E}[Z_1 \log^+ Z_1] < \infty.$$

Les principaux outils employés sont des théorèmes de convergence de martingales, le théorème de Radon-Nikodym et l'utilisation de l'arbre de Galton-Watson conditionné à survivre qu'on aura vu dans l'exposé 1.



Exposé 4 : Arbres aléatoires et mouvement brownien

D'après "Random trees and applications" de Le Gall.

Le but est d'explorer le lien entre arbres de Galton-Watson et mouvement brownien. On montrera la convergence de fonctions de contour (convenablement renormalisées) d'une forêt d'arbres de Galton-Watson vers le mouvement brownien réfléchi.

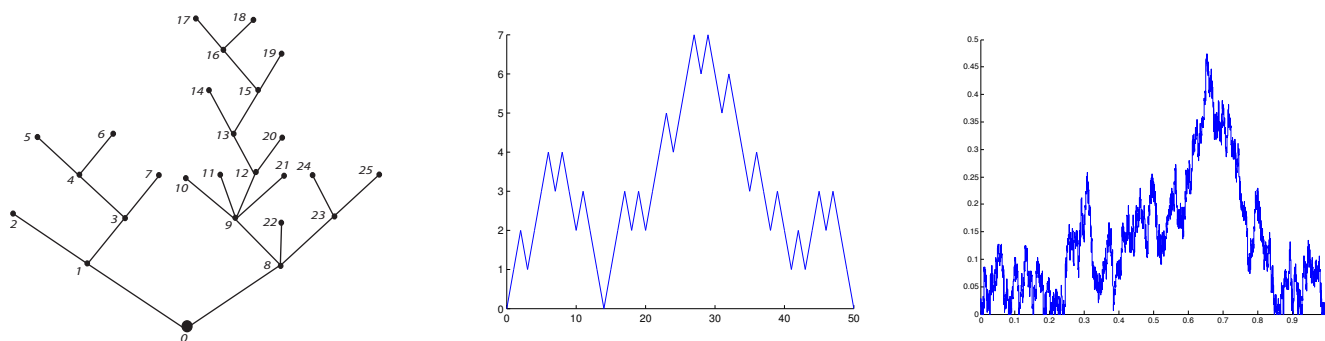


FIGURE 2 – Un arbre, sa fonction de contour et une simulation du mouvement brownien réfléchi.