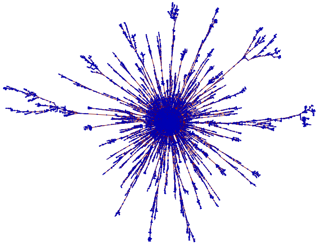
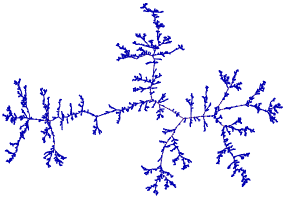
Phénomènes de condensation dans de grands arbres de Galton-Watson sous-critiques





Igor Kortchemski (Université Paris-Sud, Orsay)

Séminaire de l'ANR A3, 30 mai 2012

Philosophie générale

But: comprendre la structure de grands arbres de Galton-Watson conditionnés.

Philosophie générale

But: comprendre la structure de grands arbres de Galton-Watson conditionnés.

Cadre typique:

- la loi de reproduction μ est critique ($\sum_i i\mu(i) = 1$).

Philosophie générale

But: comprendre la structure de grands arbres de Galton-Watson conditionnés.

Cadre typique:

- la loi de reproduction μ est critique ($\sum_i i\mu(i) = 1$).
- μ est de variance finie.

Philosophie générale

But: comprendre la structure de grands arbres de Galton-Watson conditionnés.

Cadre typique:

- la loi de reproduction μ est critique ($\sum_i i\mu(i) = 1$).
- μ est de variance finie.
- on étudie des arbres GW_μ conditionnés à avoir un (grand) nombre de sommets fixé.

Philosophie générale

But: comprendre la structure de grands arbres de Galton-Watson conditionnés.

Cadre typique:

- la loi de reproduction μ est critique ($\sum_i i\mu(i) = 1$).
- μ est de variance finie.
- on étudie des arbres GW_μ conditionnés à avoir un (grand) nombre de sommets fixé.

Deux approches:

- Limites d'échelle

Philosophie générale

But: comprendre la structure de grands arbres de Galton-Watson conditionnés.

Cadre typique:

- la loi de reproduction μ est critique ($\sum_i i\mu(i) = 1$).
- μ est de variance finie.
- on étudie des arbres GW_μ conditionnés à avoir un (grand) nombre de sommets fixé.

Deux approches:

- Limites d'échelle
- Limites locales

Philosophie générale

But: comprendre la structure de grands arbres de Galton-Watson conditionnés.

Cadre typique:

- la loi de reproduction μ est critique ($\sum_i i\mu(i) = 1$).
- μ est de variance finie.
- on étudie des arbres GW_μ conditionnés à avoir un (grand) nombre de sommets fixé.

Deux approches:

- Limites d'échelle
- Limites locales

On se demandera ce qui se passe lorsque μ n'est pas critique.

Plan

I. État de l'art

II. Présentation du modèle dit « non générique »

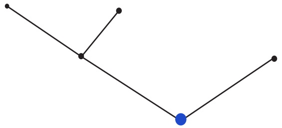
III. Théorèmes limites pour les arbres « non génériques »

IV. Une conjecture et une question

I. État de l'art

Petits rappels sur les arbres de Galton-Watson

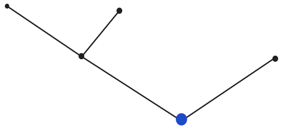
On considère des arbres plans enracinés.



Petits rappels sur les arbres de Galton-Watson

On considère des arbres plans enracinés.

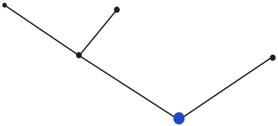
Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ de moyenne inférieure ou égale à 1 avec $\rho(1) < 1$.



Petits rappels sur les arbres de Galton-Watson

On considère des arbres plans enracinés.

Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ de moyenne inférieure ou égale à 1 avec $\rho(1) < 1$. La loi d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction ρ est l'unique mesure de probabilités $\mathbb{P}_\rho$ sur les arbres telle que :

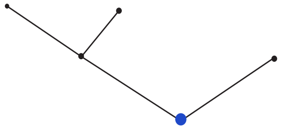


Petits rappels sur les arbres de Galton-Watson

On considère des arbres plans enracinés.

Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ de moyenne inférieure ou égale à 1 avec $\rho(1) < 1$. La loi d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction ρ est l'unique mesure de probabilités $\mathbb{P}_\rho$ sur les arbres telle que :

1. $k_\varnothing$ est de loi ρ, où $k_\varnothing$ est le nombre d'enfants de la racine.

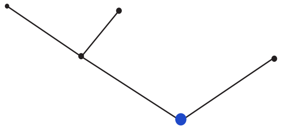


Petits rappels sur les arbres de Galton-Watson

On considère des arbres plans enracinés.

Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ de moyenne inférieure ou égale à 1 avec $\rho(1) < 1$. La loi d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction ρ est l'unique mesure de probabilités $\mathbb{P}_\rho$ sur les arbres telle que :

1. $k_\varnothing$ est de loi ρ, où $k_\varnothing$ est le nombre d'enfants de la racine.
2. pour tout $j \geqslant 1$ avec $\rho(j) > 0$, sous la loi conditionnée $\mathbb{P}_\rho(\cdot \mid k_\emptyset = j)$, les j sous-arbres issus des j enfants de la racine sont indépendents, et leur loi conditionnelle est $\mathbb{P}_\rho$.



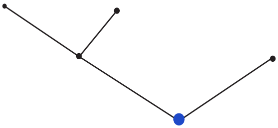
Petits rappels sur les arbres de Galton-Watson

On considère des arbres plans enracinés.

Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ de moyenne inférieure ou égale à 1 avec $\rho(1) < 1$. La loi d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction ρ est l'unique mesure de probabilités $\mathbb{P}_\rho$ sur les arbres telle que :

1. $k_\varnothing$ est de loi ρ, où $k_\varnothing$ est le nombre d'enfants de la racine.
2. pour tout $j \geqslant 1$ avec $\rho(j) > 0$, sous la loi conditionnée $\mathbb{P}_\rho(\,\cdot\,|\,k_\emptyset = j)$, les j sous-arbres issus des j enfants de la racine sont indépendents, et leur loi conditionnelle est $\mathbb{P}_\rho$.

Ici, $k_\emptyset = 2$.



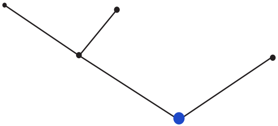
Petits rappels sur les arbres de Galton-Watson

On considère des arbres plans enracinés.

Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ de moyenne inférieure ou égale à 1 avec $\rho(1) < 1$. La loi d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction ρ est l'unique mesure de probabilités $\mathbb{P}_\rho$ sur les arbres telle que :

1. $k_\varnothing$ est de loi ρ, où $k_\varnothing$ est le nombre d'enfants de la racine.
2. pour tout $j \geqslant 1$ avec $\rho(j) > 0$, sous la loi conditionnée $\mathbb{P}_\rho(\cdot \mid k_\emptyset = j)$, les j sous-arbres issus des j enfants de la racine sont indépendents, et leur loi conditionnelle est $\mathbb{P}_\rho$.

Ici, $k_\emptyset = 2$.



On note $\zeta(\tau)$ le nombre total de sommets de τ.

Petits rappels sur les arbres de Galton-Watson

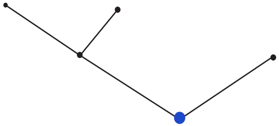
On considère des arbres plans enracinés.

Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ de moyenne inférieure ou égale à 1 avec $\rho(1) < 1$. La loi d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction ρ est l'unique mesure de probabilités $\mathbb{P}_\rho$ sur les arbres telle que :

1. $k_\varnothing$ est de loi ρ, où $k_\varnothing$ est le nombre d'enfants de la racine.
2. pour tout $j \geqslant 1$ avec $\rho(j) > 0$, sous la loi conditionnée $\mathbb{P}_\rho(\,\cdot\,|\,k_\emptyset = j)$, les j sous-arbres issus des j enfants de la racine sont indépendents, et leur loi conditionnelle est $\mathbb{P}_\rho$.

Ici, $k_\emptyset = 2$.

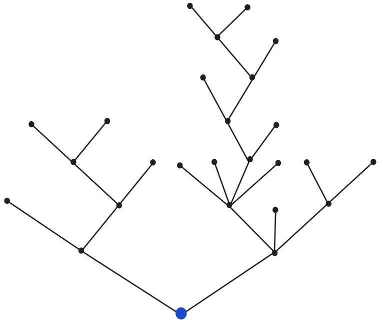
Ici, $\zeta(\tau) = 5$.



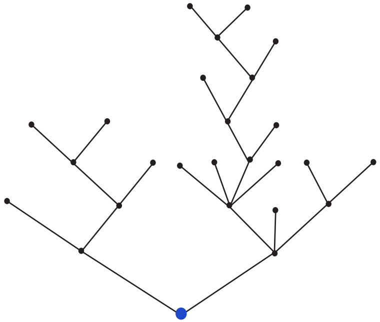
On note $\zeta(\tau)$ le nombre total de sommets de τ.

I. 1) Limites d'échelle

Codage d'arbres



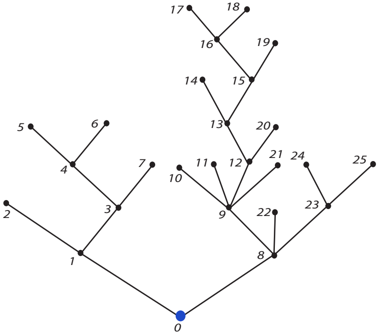
Codage d'arbres



On ordonne les sommets dans l'ordre lexicographique :
$k_\varnothing = u(0) < u(1) < \cdots < u(\zeta(\tau) - 1)$.

Soit k_u le nombre d'enfants du sommet u.

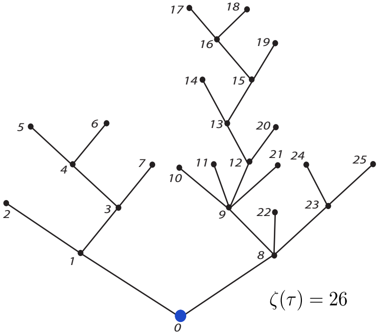
Codage d'arbres



On ordonne les sommets dans l'ordre lexicographique :
$k_\varnothing = u(0) < u(1) < \cdots < u(\zeta(\tau) - 1)$.

Soit k_u le nombre d'enfants du sommet u.

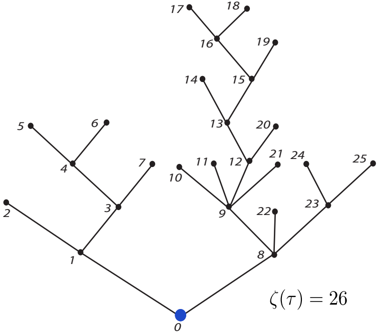
Codage d'arbres



On ordonne les sommets dans l'ordre lexicographique :
$k_\varnothing = u(0) < u(1) < \cdots < u(\zeta(\tau) - 1)$.

Soit k_u le nombre d'enfants du sommet u.

Codage d'arbres

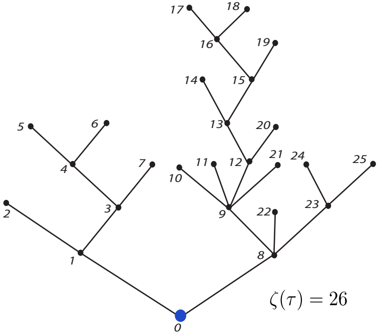


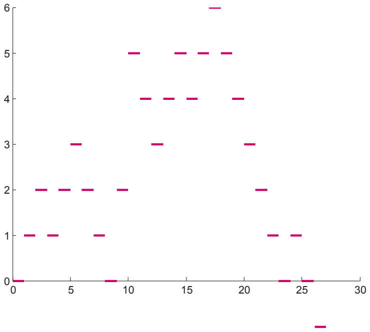
Définition

La marche de Lukasiewicz $\mathcal{W}(\tau) = (\mathcal{W}_n(\tau), 0 \leqslant n \leqslant \zeta(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

$$\mathcal{W}_0(\tau) = 0, \qquad \mathcal{W}_{n+1}(\tau) = \mathcal{W}_n(\tau) + k_{u(n)}(\tau) - 1.$$

Codage d'arbres



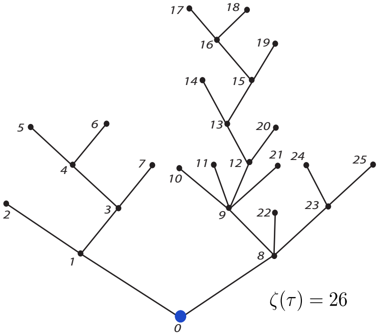


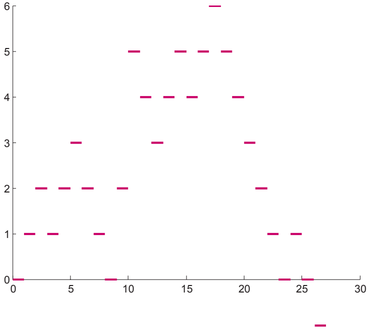
Définition

La marche de Lukasiewicz $\mathcal{W}(\tau) = (\mathcal{W}_n(\tau), 0 \leqslant n \leqslant \zeta(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

$$\mathcal{W}_0(\tau) = 0, \qquad \mathcal{W}_{n+1}(\tau) = \mathcal{W}_n(\tau) + k_{u(n)}(\tau) - 1.$$

Codage d'arbres

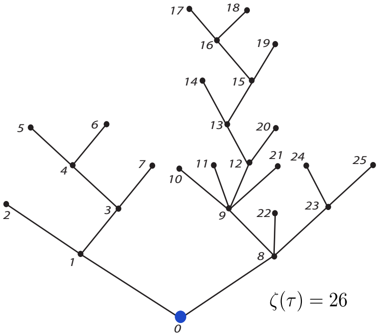




Proposition

La marche de Lukasiewicz d'un GW_{μ} tree a la même loi qu'une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1)$, $k \geqslant -1$, issue de 0, arrêtée au premier temps d'atteinte de -1.

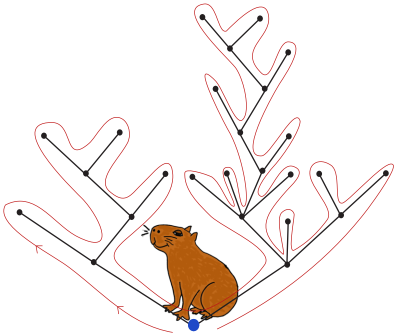
Codage d'arbres



Définition (de la fonction de contour)

Un capybara explore l'arbre à vitesse unité. Pour $0 \leqslant t \leqslant 2(\zeta(\tau) - 1)$, $C_t(\tau)$ est la distance entre la bête et la racine à l'instant t.

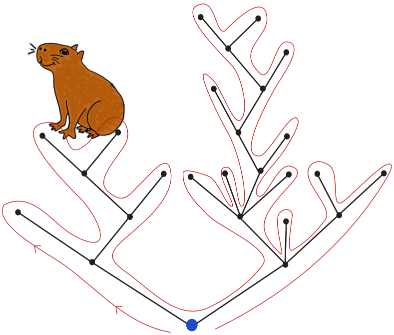
Codage d'arbres



Définition (de la fonction de contour)

Un capybara explore l'arbre à vitesse unité. Pour $0 \leqslant t \leqslant 2(\zeta(\tau)-1)$, $C_t(\tau)$ est la distance entre la bête et la racine à l'instant t.

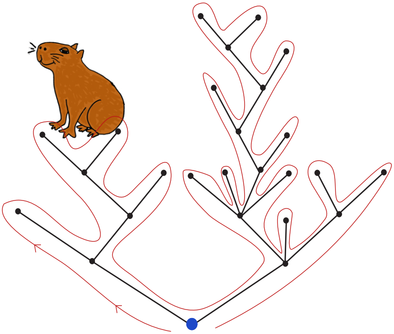
Codage d'arbres

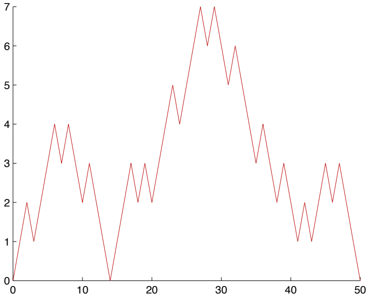


Définition (de la fonction de contour)

Un capybara explore l'arbre à vitesse unité. Pour $0 \leqslant t \leqslant 2(\zeta(\tau)-1)$, $C_t(\tau)$ est la distance entre la bête et la racine à l'instant t.

Codage d'arbres





Définition (de la fonction de contour)

Un capybara explore l'arbre à vitesse unité. Pour $0 \leqslant t \leqslant 2(\zeta(\tau)-1)$, $C_t(\tau)$ est la distance entre la bête et la racine à l'instant t.

Codage d'arbres

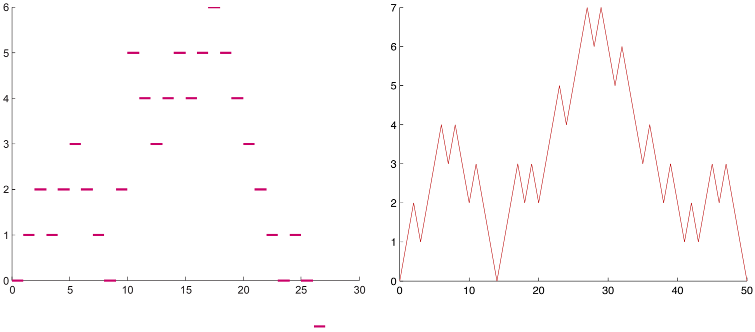


Figure: La marche de Lukasiewicz et la fonction de contour.

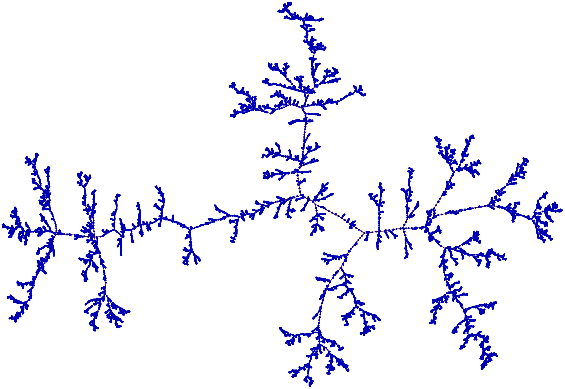
- La marche de Lukasiewicz se comporte comme une marche aléatoire.

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau)=n\right]$ arbre. À quoi ressemble t_n pour n grand ?

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu\left[\cdot \,|\, \zeta(\tau) = n\right]$ arbre. À quoi ressemble t_n pour n grand ?



Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu[\cdot \mid \zeta(\tau) = n]$ arbre. À quoi ressemble t_n pour n grand ?

Théorème (Aldous '93, Duquesne '04)

Soit σ^2 la variance de μ. On a :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{W}_{[nt]}(t_n), \frac{1}{2\sqrt{n}}C_{2nt}(t_n)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \left(\sigma \cdot \mathbb{e}(t), \frac{1}{\sigma}\mathbb{e}(t)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée.

Limites d'échelle

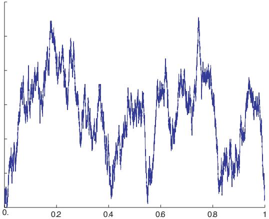
Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Soit $\mathfrak{t}_n$ un $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau)=n\right]$ arbre. À quoi ressemble $\mathfrak{t}_n$ pour n grand ?

Théorème (Aldous '93, Duquesne '04)

Soit σ^2 la variance de μ. On a :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{W}_{[nt]}(\mathfrak{t}_n), \frac{1}{2\sqrt{n}}C_{2nt}(\mathfrak{t}_n)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\sigma\cdot\mathbb{e}(t), \frac{1}{\sigma}\mathbb{e}(t)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée.



Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Soit $\mathfrak{t}_n$ un $\mathbb{P}_\mu[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau)=n]$ arbre. À quoi ressemble $\mathfrak{t}_n$ pour n grand ?

Théorème (Aldous '93, Duquesne '04)

Soit σ^2 la variance de μ. On a :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{W}_{[nt]}(\mathfrak{t}_n), \frac{1}{2\sqrt{n}}C_{2nt}(\mathfrak{t}_n)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\sigma\cdot \mathbb{e}(t), \frac{1}{\sigma}\mathbb{e}(t)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée.

Remarque:

- Duquesne '04 : extension au cas où μ est dans le domaine d'attraction d'une loi stable.

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Soit $\mathfrak{t}_n$ un $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot \mid \zeta(\tau) = n\right]$ arbre. À quoi ressemble $\mathfrak{t}_n$ pour n grand ?

Théorème (Aldous '93, Duquesne '04)

Soit σ^2 la variance de μ. On a :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{W}_{[nt]}(\mathfrak{t}_n), \frac{1}{2\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathfrak{t}_n)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\sigma \cdot \mathbb{e}(t), \frac{1}{\sigma}\mathbb{e}(t)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée.

Conséquences :

- théorème limite pour la hauteur de $\mathfrak{t}_n$,

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Soit $\mathfrak{t}_n$ un $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau)=n\right]$ arbre. À quoi ressemble $\mathfrak{t}_n$ pour n grand ?

Théorème (Aldous '93, Duquesne '04)

Soit σ^2 la variance de μ. On a :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{W}_{[nt]}(\mathfrak{t}_n), \frac{1}{2\sqrt{n}}C_{2nt}(\mathfrak{t}_n)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\sigma\cdot \mathbb{e}(t), \frac{1}{\sigma}\mathbb{e}(t)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée.

Conséquences :

- théorème limite pour la hauteur de $\mathfrak{t}_n$,
- convergence au sens de Gromov-Hausdorff de $\mathfrak{t}_n$, convenablement renormalisé, vers le CRT.

I. 2) Limites locales

Convergence locale

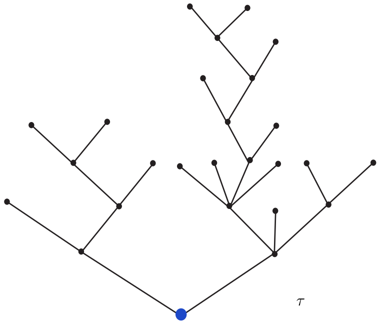
Définition (Convergence locale)

Soit $B_r(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des sommets à distance au plus r de la racine.

Convergence locale

Définition (Convergence locale)

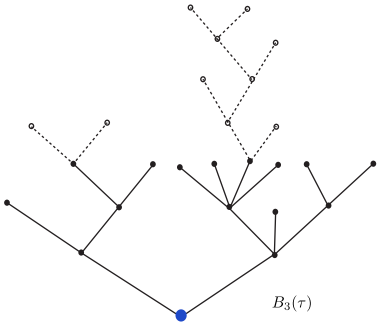
Soit $B_r(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des sommets à distance au plus r de la racine.



Convergence locale

Définition (Convergence locale)

Soit $B_r(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des sommets à distance au plus r de la racine.



Convergence locale

Définition (Convergence locale)

Soit $B_r(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des sommets à distance au plus r de la racine.

On dit que τ_n converge localement vers τ (localement fini) si, pour tout $r > 0$:

$$B_r(\tau_n) = B_r(\tau)$$

pour n suffisamment grand.

Convergence locale

Définition (Convergence locale)

Soit $B_r(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des sommets à distance au plus r de la racine.

On dit que τ_n converge localement vers τ (localement fini) si, pour tout $r > 0$:

$$B_r(\tau_n) = B_r(\tau)$$

pour n suffisamment grand.

Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu[\cdot \,|\, \zeta(\tau) = n]$ arbre.

Convergence locale

Définition (Convergence locale)

Soit $B_r(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des sommets à distance au plus r de la racine.

On dit que τ_n converge localement vers τ (localement fini) si, pour tout $r > 0$:

$$B_r(\tau_n) = B_r(\tau)$$

pour n suffisamment grand.

Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu\left[\cdot \,|\, \zeta(\tau) = n\right]$ arbre.

Est-ce que t_n converge localement (en loi) lorsque $n \to \infty$?

L'arbre de GW critique conditionné à survivre

On part d'une épine dorsale infinie.

L'arbre de GW critique conditionné à survivre

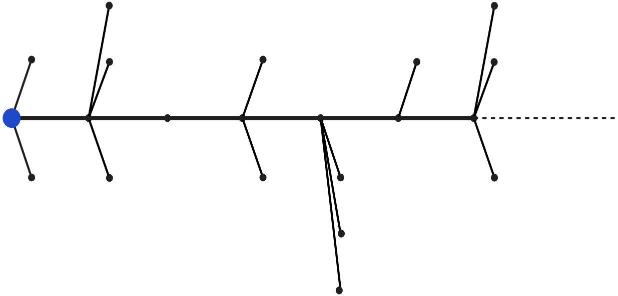
On part d'une épine dorsale infinie.

Le nombre d'enfants de chaque sommet u de l'épine suit la loi :

$$\mathbb{P}[k_u = i] = i\mu(i), \qquad i \geqslant 0.$$

L'arbre de GW critique conditionné à survivre

On part d'une épine dorsale infinie.

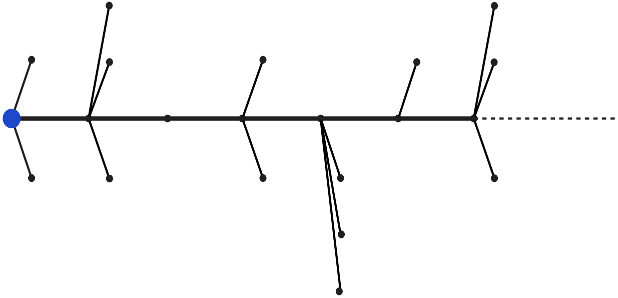


Le nombre d'enfants de chaque sommet u de l'épine suit la loi :

$$\mathbb{P}\left[k_u = i\right] = i\mu(i), \qquad i \geqslant 0.$$

L'arbre de GW critique conditionné à survivre

On part d'une épine dorsale infinie.



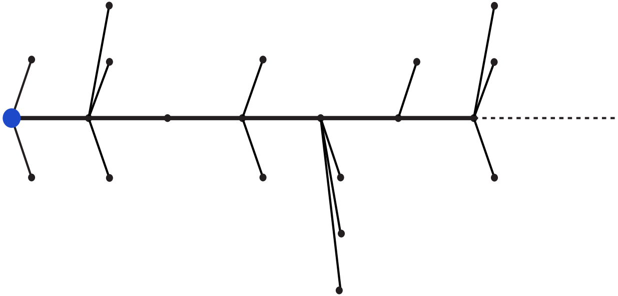
Le nombre d'enfants de chaque sommet u de l'épine suit la loi :

$$\mathbb{P}[k_u = i] = i\mu(i), \qquad i \geqslant 0.$$

De plus, l'enfant de u sur l'épine est uniformément distribué parmi les enfants de u.

L'arbre de GW critique conditionné à survivre

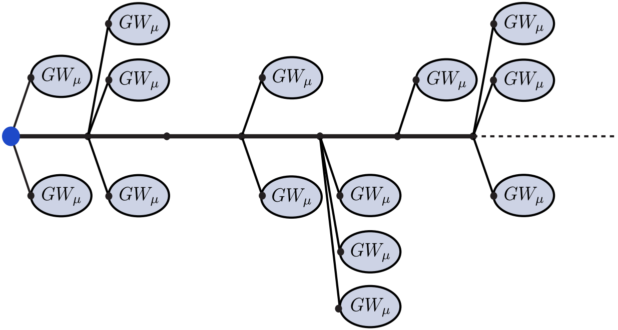
On part d'une épine dorsale infinie.



On greffe ensuite des GW_{μ} arbres sur les nouveaux sommets.

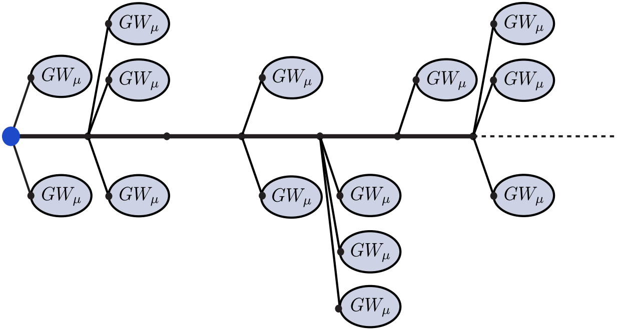
L'arbre de GW critique conditionné à survivre

On part d'une épine dorsale infinie.



L'arbre de GW critique conditionné à survivre

On part d'une épine dorsale infinie.



L'arbre infini ainsi obtenu est appelé « arbre de Galton-Watson critique conditionné à survivre », et noté $\widehat{\mathcal{T}}$ (Kesten 86').

Convergence locale vers $\widehat{\mathcal{T}}$

Théorème (Kesten, 86')

Soit μ *une loi de reproduction critique et de variance finie, et* $\mathfrak{t}_n$ *un* $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau)=n\right]$ *arbre. Alors :*

$$\mathfrak{t}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

Convergence locale vers $\widehat{\mathcal{T}}$

Théorème (Kesten, 86')

Soit μ *une loi de reproduction critique et de variance finie, et* t_n *un* $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot \mid \zeta(\tau) = n\right]$ *arbre. Alors :*

$$t_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

au sens de la convergence locale.

Convergence locale vers $\widehat{\mathcal{T}}$

Théorème (Kesten, 86')

Soit μ *une loi de reproduction critique et de variance finie, et* $\mathfrak{t}_n$ *un* $\mathbb{P}_\mu\left[\cdot \mid \zeta(\tau)=n\right]$ *arbre. Alors :*

$$\mathfrak{t}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

au sens de la convergence locale.

Remarque:

- Janson '12 : ce résultat est satisfait pour n'importe quelle loi de reproduction μ critique.

Convergence locale vers $\widehat{\mathcal{T}}$

Théorème (Kesten, 86')

Soit μ *une loi de reproduction critique et de variance finie, et* t_n *un* $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau)=n\right]$ *arbre. Alors :*

$$t_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

au sens de la convergence locale.

Conséquences:

- On comprend la structure locale de t_n pour n grand.

Convergence locale vers $\widehat{\mathcal{T}}$

Théorème (Kesten, 86')

Soit μ *une loi de reproduction critique et de variance finie, et* t_n *un* $\mathbb{P}_\mu[\cdot \mid \zeta(\tau) = n]$ *arbre. Alors :*

$$t_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \widehat{\mathcal{T}}$$

au sens de la convergence locale.

Conséquences:

- On comprend la structure locale de t_n pour n grand.
- $k_\emptyset(t_n)$ converge en loi vers la loi de probabilité $\rho(i) = i\mu(i), i \geqslant 0$.

II. Présentation des arbres « non génériques »

II. 1) Familles exponentielles

Familles exponentielles

Soit μ une loi de reproduction avec $0 < \mu(0) < 1$.

Familles exponentielles

Soit μ une loi de reproduction avec $0 < \mu(0) < 1$.

Lemme (Kennedy '75)

Soit $\lambda > 0$ tel que

$$Z_\lambda = \sum_{i \geqslant 0} \mu(i)\lambda^i < \infty.$$

Familles exponentielles

Soit μ une loi de reproduction avec $0 < \mu(0) < 1$.

Lemme (Kennedy '75)

Soit $\lambda > 0$ tel que

$$Z_\lambda = \sum_{i \geqslant 0} \mu(i)\lambda^i < \infty.$$

On pose

$$\mu^{(\lambda)}(i) = \frac{1}{Z_\lambda}\mu(i)\lambda^i, \qquad i \geqslant 0.$$

Familles exponentielles

Soit μ une loi de reproduction avec $0 < \mu(0) < 1$.

Lemme (Kennedy '75)

Soit $\lambda > 0$ tel que

$$Z_\lambda = \sum_{i \geqslant 0} \mu(i)\lambda^i < \infty.$$

On pose

$$\mu^{(\lambda)}(i) = \frac{1}{Z_\lambda}\mu(i)\lambda^i, \qquad i \geqslant 0.$$

Alors un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets a la même loi qu'un $GW_{\mu^{(\lambda)}}$ arbre conditionné à avoir n sommets.

Familles exponentielles

Soit μ une loi de reproduction avec $0 < \mu(0) < 1$.

Lemme (Kennedy '75)

Soit $\lambda > 0$ tel que

$$Z_\lambda = \sum_{i \geqslant 0} \mu(i)\lambda^i < \infty.$$

On pose

$$\mu^{(\lambda)}(i) = \frac{1}{Z_\lambda}\mu(i)\lambda^i, \qquad i \geqslant 0.$$

Alors un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets a la même loi qu'un $GW_{\mu^{(\lambda)}}$ arbre conditionné à avoir n sommets.

Conséquence:

- s'il existe $\lambda > 0$ tel que $Z_\lambda < \infty$ et $\mu^{(\lambda)}$ soit critique, on est ramené au cas critique.

Familles exponentielles

Proposition (Janson '12)

Il n'existe pas $\lambda > 0$ tel que $Z_\lambda < \infty$ et $\mu^{(\lambda)}$ soit critique si, et seulement si :

Familles exponentielles

Proposition (Janson '12)

Il n'existe pas $\lambda > 0$ tel que $Z_\lambda < \infty$ et $\mu^{(\lambda)}$ soit critique si, et seulement si :

- μ est sous-critique ($\sum_i i\mu(i) < 1$)

Familles exponentielles

Proposition (Janson '12)

Il n'existe pas $\lambda > 0$ tel que $Z_\lambda < \infty$ et $\mu^{(\lambda)}$ soit critique si, et seulement si :

- μ est sous-critique ($\sum_i i\mu(i) < 1$)
- le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{i \geqslant 0} \mu(i) z^i$ est 1.

Familles exponentielles

Proposition (Janson '12)

Il n'existe pas $\lambda > 0$ tel que $Z_\lambda < \infty$ et $\mu^{(\lambda)}$ soit critique si, et seulement si :

- μ est sous-critique ($\sum_i i\mu(i) < 1$)
- le rayon de convergence de $\sum_{i \geqslant 0} \mu(i) z^i$ est 1.

On dit dans ce cas que μ est « non générique ».

Familles exponentielles

Proposition (Janson '12)

Il n'existe pas $\lambda > 0$ tel que $Z_\lambda < \infty$ et $\mu^{(\lambda)}$ soit critique si, et seulement si :

- μ est sous-critique ($\sum_i i\mu(i) < 1$)
- le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{i \geqslant 0} \mu(i) z^i$ est 1.

On dit dans ce cas que μ est « non générique ».

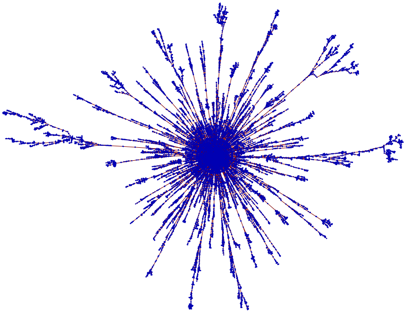
Exemple : $\mu(i) \sim c/i^\beta$ avec $c > 0$ et $\beta > 2$.

Grands arbres non génériques

On fixe μ non générique. À quoi ressemble un $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau)=n\right]$ arbre pour n grand (Jonsson & Stefánsson 11') ?

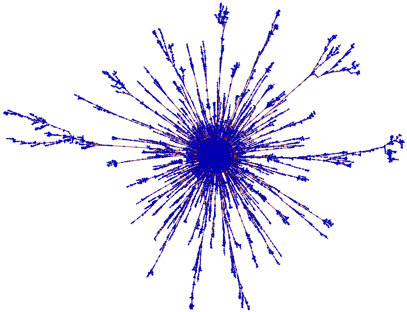
Grands arbres non génériques

On fixe μ non générique. À quoi ressemble un $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau)=n\right]$ arbre pour n grand (Jonsson & Stefánsson 11') ?



Grands arbres non génériques

On fixe μ non générique. À quoi ressemble un $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau)=n\right]$ arbre pour n grand (Jonsson & Stefánsson 11') ?



Phénomène de **condensation**.

Convergence locale modifée

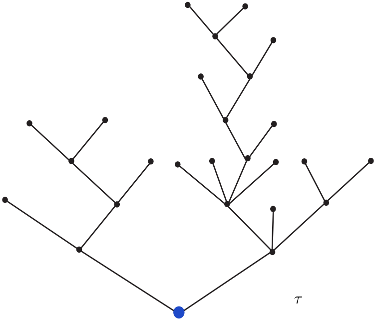
Définition (Jonsson & Stefánsson)

Soit $\widetilde{B_r}(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des r premiers enfants des sommets à distance au plus r de la racine.

Convergence locale modifée

Définition (Jonsson & Stefánsson)

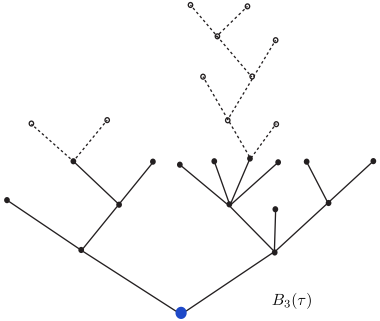
Soit $\widetilde{B_r}(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des r premiers enfants des sommets à distance au plus r de la racine.



Convergence locale modifée

Définition (Jonsson & Stefánsson)

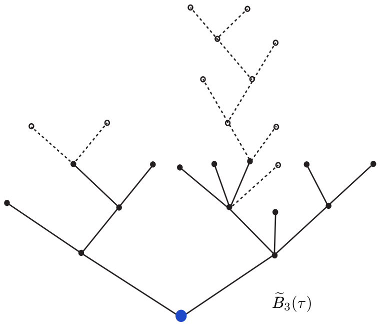
Soit $\widetilde{B_r}(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des r premiers enfants des sommets à distance au plus r de la racine.



Convergence locale modifée

Définition (Jonsson & Stefánsson)

Soit $\widetilde{B_r}(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des r premiers enfants des sommets à distance au plus r de la racine.



Convergence locale modifée

Définition (Jonsson & Stefánsson)

Soit $\widetilde{B_r}(\tau)$ le sous-arbre de τ formé des r premiers enfants des sommets à distance au plus r de la racine.

On dit que τ_n converge localement vers τ si, pour tout $r > 0$:

$$\widetilde{B}_r(\tau_n) = \widetilde{B}_r(\tau)$$

pour n suffisamment grand.

L'arbre de GW critique conditionné à survivre modifié

On part d'une épine dorsale de longueur finie aléatoire S, où $\mathbb{P}[S = i] = (1 - \mathbf{m})\mathbf{m}^i$ pour $i \geqslant 0$, et $\mathbf{m}$ est la moyenne de μ.

L'arbre de GW critique conditionné à survivre modifié

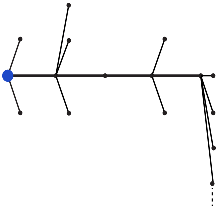
On part d'une épine dorsale de longueur finie aléatoire S, où $\mathbb{P}[S = i] = (1 - \mathbf{m})\mathbf{m}^i$ pour $i \geqslant 0$, et $\mathbf{m}$ est la moyenne de μ.

Le sommet en haut de l'épine a un nombre infini d'enfants, et le nombre d'enfants de chaque autre sommet u de l'épine suit la loi :

$$\mathbb{P}[k_u = i] = \frac{i\mu(i)}{\mathbf{m}}, \qquad i \geqslant 0$$

L'arbre de GW critique conditionné à survivre modifié

On part d'une épine dorsale de longueur finie aléatoire S, où $\mathbb{P}[S = i] = (1 - \mathbf{m})\mathbf{m}^i$ pour $i \geqslant 0$, et $\mathbf{m}$ est la moyenne de μ.

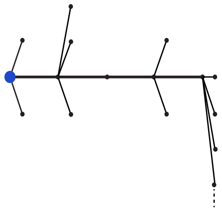


Le sommet en haut de l'épine a un nombre infini d'enfants, et le nombre d'enfants de chaque autre sommet u de l'épine suit la loi :

$$\mathbb{P}[k_u = i] = \frac{i\mu(i)}{\mathbf{m}}, \qquad i \geqslant 0$$

L'arbre de GW critique conditionné à survivre modifié

On part d'une épine dorsale de longueur finie aléatoire S, où $\mathbb{P}[S = i] = (1 - \mathbf{m})\mathbf{m}^i$ pour $i \geqslant 0$, et $\mathbf{m}$ est la moyenne de μ.



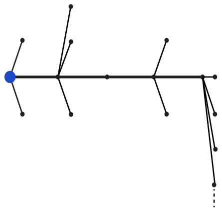
Le sommet en haut de l'épine a un nombre infini d'enfants, et le nombre d'enfants de chaque autre sommet u de l'épine suit la loi :

$$\mathbb{P}[k_u = i] = \frac{i\mu(i)}{\mathbf{m}}, \qquad i \geqslant 0$$

De plus, l'enfant de u sur l'épine est uniformément distribué parmi les enfants de u.

L'arbre de GW critique conditionné à survivre modifié

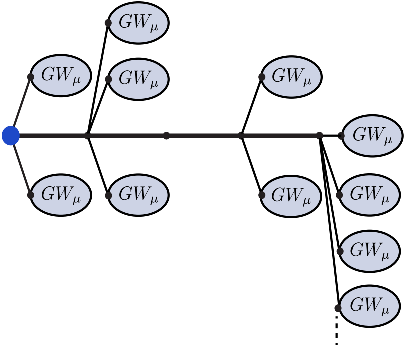
On part d'une épine dorsale de longueur finie aléatoire S, où $\mathbb{P}[S = i] = (1 - \mathbf{m})\mathbf{m}^i$ pour $i \geqslant 0$, et $\mathbf{m}$ est la moyenne de μ.



On greffe ensuite des GW_μ arbres sur les nouveaux sommets.

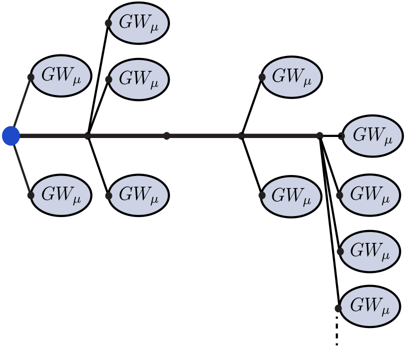
L'arbre de GW critique conditionné à survivre modifié

On part d'une épine dorsale de longueur finie aléatoire S, où $\mathbb{P}[S = i] = (1-\mathbf{m})\mathbf{m}^i$ pour $i \geqslant 0$, et $\mathbf{m}$ est la moyenne de μ.



L'arbre de GW critique conditionné à survivre modifié

On part d'une épine dorsale de longueur finie aléatoire S, où $\mathbb{P}[S = i] = (1 - \mathbf{m})\mathbf{m}^i$ pour $i \geqslant 0$, et $\mathbf{m}$ est la moyenne de μ.



L'arbre infini ainsi obtenu est appelé « arbre de Galton-Watson non générique conditionné à être infini », et noté $\widehat{\mathcal{T}}$ (Jonsson & Stefánsson 11').

Convergence locale

Théorème (Jonsson & Stefánsson '11)

Soit μ *une loi de reproduction sous-critique telle que* $\mu(i) \sim c/i^{\beta}$ *avec* $c > 0$, $\beta > 2$. *Soit* $\mathfrak{t}_n$ *un* $\mathbb{P}_{\mu}\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau) = n\right]$ *arbre. Alors :*

1) *On a :*

$$\mathfrak{t}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

Convergence locale

Théorème (Jonsson & Stefánsson '11)

Soit μ *une loi de reproduction sous-critique telle que* $\mu(i) \sim c/i^{\beta}$ *avec* $c > 0$, $\beta > 2$. *Soit* $\mathfrak{t}_n$ *un* $\mathbb{P}_\mu [\cdot \,|\, \zeta(\tau) = n]$ *arbre. Alors :*

1) *On a :*

$$\mathfrak{t}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

au sens de la convergence $\widetilde{\textit{locale}}$.

Convergence locale

Théorème (Jonsson & Stefánsson '11)

Soit μ *une loi de reproduction sous-critique telle que* $\mu(i) \sim c/i^{\beta}$ *avec* $c > 0$, $\beta > 2$. *Soit* $\mathfrak{t}_n$ *un* $\mathbb{P}_\mu\left[\,\cdot \mid \zeta(\tau) = n\right]$ *arbre. Alors :*

1) *On a :*

$$\mathfrak{t}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

au sens de la convergence locale.

2) *Le degré maximal de* $\mathfrak{t}_n$*, divisé par* n*, converge en probabilité vers* $1 - \mathbf{m}$.

Convergence locale

Théorème (Jonsson & Stefánsson '11)

Soit μ *une loi de reproduction sous-critique telle que* $\mu(i) \sim c/i^{\beta}$ *avec* $c > 0$, $\beta > 2$. *Soit* t_n *un* $\mathbb{P}_{\mu}\left[\,\cdot\,|\,\zeta(\tau) = n\right]$ *arbre. Alors :*

1) *On a :*

$$t_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

au sens de la convergence $\widetilde{\textit{locale}}$*.*

2) *Le degré maximal de* t_n*, divisé par* n*, converge en probabilité vers* $1 - \mathbf{m}$*.*

Remarques:

- Janson '12 : le point 1) est satisfait pour n'importe quelle loi de reproduction non générique μ.

Convergence locale

Théorème (Jonsson & Stefánsson '11)

Soit μ *une loi de reproduction sous-critique telle que* $\mu(i) \sim c/i^\beta$ *avec* $c > 0$, $\beta > 2$. *Soit* t_n *un* $\mathbb{P}_\mu[\cdot \mid \zeta(\tau) = n]$ *arbre. Alors :*

1) *On a :*

$$t_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

au sens de la convergence $\widetilde{\textit{locale}}$.

2) *Le degré maximal de* t_n, *divisé par* n, *converge en probabilité vers* $1 - \mathbf{m}$.

Remarques:

- Janson '12 : le point 1) est satisfait pour n'importe quelle loi de reproduction non générique μ.
- Un GW_μ arbre a en moyenne $1 + \mathbf{m} + \mathbf{m}^2 + \cdots = 1/(1 - \mathbf{m})$ sommets.

Convergence locale

Théorème (Jonsson & Stefánsson '11)

Soit μ *une loi de reproduction sous-critique telle que* $\mu(i) \sim c/i^{\beta}$ *avec* $c > 0$, $\beta > 2$. *Soit* t_n *un* $\mathbb{P}_\mu[\,\cdot \mid \zeta(\tau) = n]$ *arbre. Alors :*

1) *On a :*

$$t_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widehat{\mathcal{T}}$$

au sens de la convergence $\widetilde{\textit{locale}}$.

2) *Le degré maximal de* t_n, *divisé par* n, *converge en probabilité vers* $1 - \mathbf{m}$.

Remarques:

- Janson '12 : le point 1) est satisfait pour n'importe quelle loi de reproduction non générique μ.
- Un GW_μ arbre a en moyenne $1 + \mathbf{m} + \mathbf{m}^2 + \cdots = 1/(1 - \mathbf{m})$ sommets. Ainsi, une forêt de cn arbres GW_μ a en moyenne $cn/(1 - \mathbf{m})$ sommets.

III. Théorèmes limites pour les arbres « non génériques »

Hypothèses

On fixe une loi de reproduction μ telle que :

- μ est sous-critique ($0 < \sum_i i\mu(i) < 1$)

Hypothèses

On fixe une loi de reproduction μ telle que :

- μ est sous-critique ($0 < \sum_i i\mu(i) < 1$)
- Il existe une fonction à variation lente L telle que

$$\mu(n) = \frac{L(n)}{n^{1+\theta}}, \qquad n \geqslant 1$$

avec $\theta > 1$ fixé.

Hypothèses

On fixe une loi de reproduction μ telle que :

- μ est sous-critique $(0 < \sum_i i\mu(i) < 1)$
- Il existe une fonction à variation lente L telle que

$$\mu(n) = \frac{L(n)}{n^{1+\theta}}, \qquad n \geqslant 1$$

avec $\theta > 1$ fixé.

(L est à variation lente si $L(tx)/L(x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$, $\forall t > 0$.)

Hypothèses

On fixe une loi de reproduction μ telle que :

- μ est sous-critique ($0 < \sum_i i\mu(i) < 1$)
- Il existe une fonction à variation lente L telle que

$$\mu(n) = \frac{L(n)}{n^{1+\theta}}, \qquad n \geqslant 1$$

avec $\theta > 1$ fixé.

(L est à variation lente si $L(tx)/L(x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$, $\forall t > 0$.)

Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu\left[\cdot \,|\, \zeta(\tau) = n\right]$ arbre. Questions :

Hypothèses

On fixe une loi de reproduction μ telle que :

- μ est sous-critique $(0 < \sum_i i\mu(i) < 1)$
- Il existe une fonction à variation lente L telle que

$$\mu(n) = \frac{L(n)}{n^{1+\theta}}, \qquad n \geqslant 1$$

avec $\theta > 1$ fixé.

(L est à variation lente si $L(tx)/L(x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$, $\forall t > 0$.)

Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu[\cdot \mid \zeta(\tau) = n]$ arbre. Questions :

- Est-ce que la marche de Lukasiewicz et fonction de contour de t_n, convenablement renormalisées, convergent ?

Hypothèses

On fixe une loi de reproduction μ telle que :

- μ est sous-critique ($0 < \sum_i i\mu(i) < 1$)
- Il existe une fonction à variation lente L telle que

$$\mu(n) = \frac{L(n)}{n^{1+\theta}}, \qquad n \geqslant 1$$

avec $\theta > 1$ fixé.

(L est à variation lente si $L(tx)/L(x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$, $\forall t > 0$.)

Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu [\,\cdot \,|\, \zeta(\tau) = n]$ arbre. Questions :

- Est-ce que la marche de Lukasiewicz et fonction de contour de t_n, convenablement renormalisées, convergent ?
- Quelles sont les fluctuations du degré maximal ?

Hypothèses

On fixe une loi de reproduction μ telle que :

- μ est sous-critique ($0 < \sum_i i\mu(i) < 1$)
- Il existe une fonction à variation lente L telle que

$$\mu(n) = \frac{L(n)}{n^{1+\theta}}, \qquad n \geqslant 1$$

avec $\theta > 1$ fixé.

(L est à variation lente si $L(tx)/L(x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$, $\forall t > 0$.)

Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu[\cdot \mid \zeta(\tau) = n]$ arbre. Questions :

- Est-ce que la marche de Lukasiewicz et fonction de contour de t_n, convenablement renormalisées, convergent ?
- Quelles sont les fluctuations du degré maximal ?
- Où est situé le sommet de degré maximal ?

Hypothèses

On fixe une loi de reproduction μ telle que :

- μ est sous-critique $(0 < \sum_i i\mu(i) < 1)$
- Il existe une fonction à variation lente L telle que

$$\mu(n) = \frac{L(n)}{n^{1+\theta}}, \qquad n \geqslant 1$$

avec $\theta > 1$ fixé.

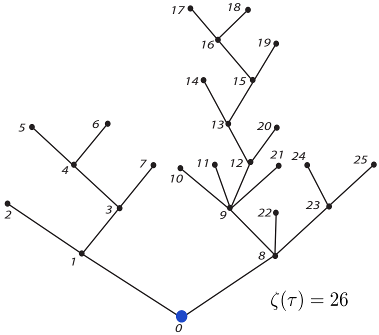
(L est à variation lente si $L(tx)/L(x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$, $\forall t > 0$.)

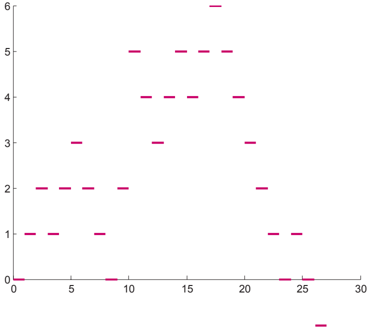
Soit t_n un $\mathbb{P}_\mu\left[\cdot \,|\, \zeta(\tau) = n\right]$ arbre. Questions :

- Est-ce que la marche de Lukasiewicz et fonction de contour de t_n, convenablement renormalisées, convergent ?
- Quelles sont les fluctuations du degré maximal ?
- Où est situé le sommet de degré maximal ?
- Quelle est la hauteur de t_n ?

III. 1) Convergence de la marche de Lukasiewicz

Rappel





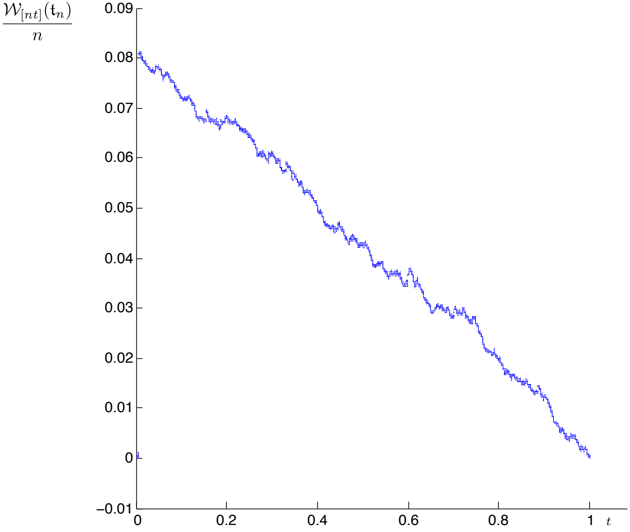
Soit k_u le nombre d'enfants du sommet u.

Définition

La marche de Lukasiewicz $W(\tau) = (W_n(\tau), 0 \leqslant n \leqslant \zeta(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

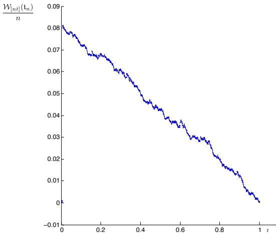
$$W_0(\tau) = 0, \qquad W_{n+1}(\tau) = W_n(\tau) + k_{u(n)}(\tau) - 1.$$

Convergence de la marche de Lukasiewicz



Convergence de la marche de Lukasiewicz

Soit $\mathfrak{U}(\mathfrak{t}_n)$ l'indice du premier sommet de degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

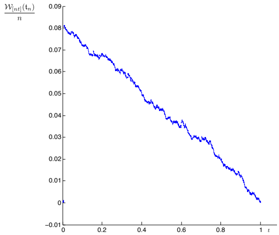


Convergence de la marche de Lukasiewicz

Soit $\mathfrak{U}(\mathfrak{t}_n)$ l'indice du premier sommet de degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

Théorème (K. 12')

Les assertions suivantes sont vérifiées :



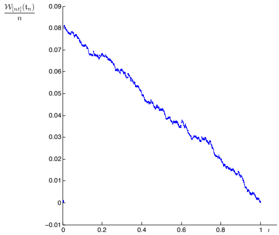
Convergence de la marche de Lukasiewicz

Soit $\mathfrak{U}(\mathfrak{t}_n)$ l'indice du premier sommet de degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

Théorème (K. 12')

Les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) $\mathfrak{U}(\mathfrak{t}_n)/n$ *converge en probabilité vers* 0 *quand* $n \to \infty$.



Convergence de la marche de Lukasiewicz

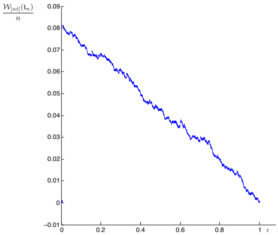
Soit $U(\mathfrak{t}_n)$ l'indice du premier sommet de degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

Théorème (K. 12')

Les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) $U(\mathfrak{t}_n)/n$ *converge en probabilité vers* 0 *quand* $n \to \infty$.

(ii) *On a* $\sup_{0 \leqslant i \leqslant U(\mathfrak{t}_n)} \frac{\mathcal{W}_i(\mathfrak{t}_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} 0.$



Convergence de la marche de Lukasiewicz

Soit $\mathfrak{U}(\mathfrak{t}_n)$ l'indice du premier sommet de degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

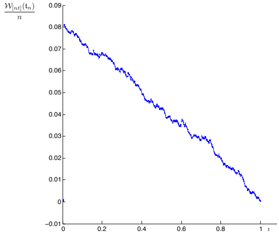
Théorème (K. 12')

Les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) $\mathfrak{U}(\mathfrak{t}_n)/n$ *converge en probabilité vers* 0 *quand* $n \to \infty$.

(ii) *On a* $\displaystyle \sup_{0 \leqslant i \leqslant \mathfrak{U}(\mathfrak{t}_n)} \frac{\mathcal{W}_i(\mathfrak{t}_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} 0.$

(iii) *On a* $\displaystyle \left(\frac{\mathcal{W}_{[nt] \vee (\mathfrak{U}(\mathfrak{t}_n)+1)}(\mathfrak{t}_n)}{n}, 0 \leqslant t \leqslant 1 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \left((1-\mathbf{m})(1-t)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1}.$



Convergence de la marche de Lukasiewicz

Soit $U(t_n)$ l'indice du premier sommet de degré maximal de t_n.

Théorème (K. 12')

Les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) $U(t_n)/n$ *converge en probabilité vers* 0 *quand* $n \to \infty$.

(ii) *On a* $\displaystyle \sup_{0 \leqslant i \leqslant U(t_n)} \frac{\mathcal{W}_i(t_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} 0.$

(iii) *On a* $\displaystyle \left(\frac{\mathcal{W}_{[nt] \vee (U(t_n)+1)}(t_n)}{n}, 0 \leqslant t \leqslant 1 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} ((1-\mathbf{m})(1-t))_{0 \leqslant t \leqslant 1}.$

Remarque :

- La limite est déterministe et ne dépend que de $\mathbf{m}$.

Idée de preuve

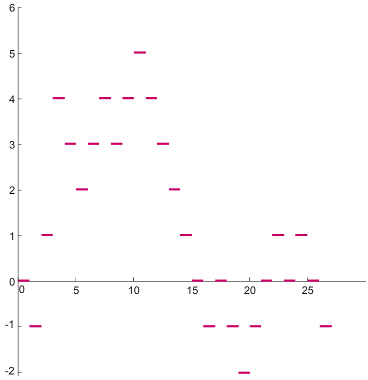
Soit $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1)$, $k \geqslant -1$.

Étape 1 : transformée de Vervaat $\mathcal{V}$. On suppose que $W_n = -1$.

Idée de preuve

Soit $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1), k \geqslant -1$.

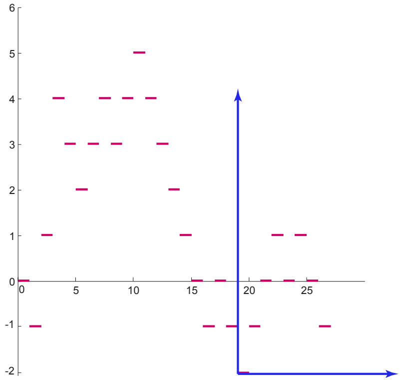
Étape 1 : transformée de Vervaat $\mathcal{V}$. On suppose que $W_n = -1$.



Idée de preuve

Soit $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1)$, $k \geqslant -1$.

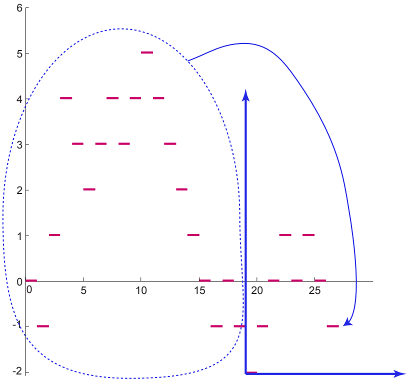
Étape 1 : transformée de Vervaat $\mathcal{V}$. On suppose que $W_n = -1$.



Idée de preuve

Soit $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1), k \geqslant -1$.

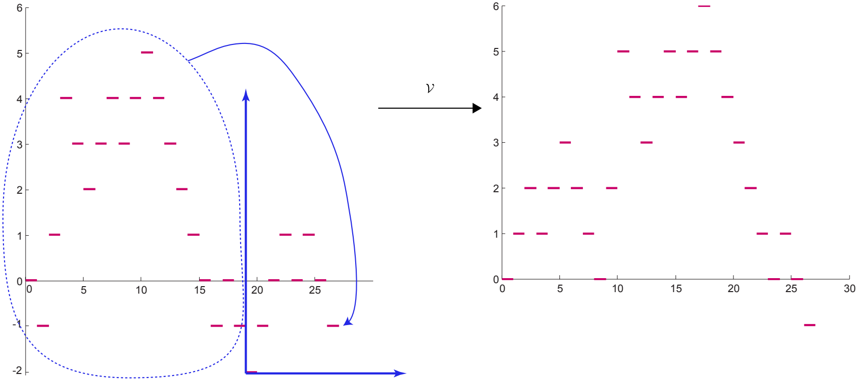
Étape 1 : transformée de Vervaat $\mathcal{V}$. On suppose que $W_n = -1$.



Idée de preuve

Soit $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1), k \geqslant -1$.

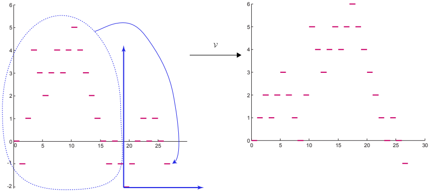
Étape 1 : transformée de Vervaat $\mathcal{V}$. On suppose que $W_n = -1$.



Idée de preuve

Soit $(W_n)_{n\geqslant 0}$ une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1), k \geqslant -1$.

Étape 1 : transformée de Vervaat $\mathcal{V}$. On suppose que $W_n = -1$.



Proposition

La transformée de Vervaat de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ sous la loi $\mathbb{P}[\cdot \mid W_n = -1]$ est la loi de $(\mathcal{W}_0(\mathfrak{t}_n), \ldots, \mathcal{W}_n(\mathfrak{t}_n))$.

Idée de preuve

$(W_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1), k \geqslant -1$.

Étape 2.
Il s'agit donc de comprendre $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ sous la loi $\mathbb{P}[\cdot \mid W_n = -1]$.

Idée de preuve

$(W_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1), k \geqslant -1$.

Étape 2.
Il s'agit donc de comprendre $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ sous la loi $\mathbb{P}[\cdot \mid W_n = -1]$.

<u>*Point important:*</u> $\mathbb{E}[W_1] = \mathbf{m} - 1 < 0$.

Idée de preuve

$(W_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1), k \geqslant -1$.

Étape 2.
Il s'agit donc de comprendre $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ sous la loi $\mathbb{P}[\cdot \,|\, W_n = -1]$.

<u>*Point important:*</u> $\mathbb{E}[W_1] = \mathbf{m} - 1 < 0$. On pose donc

$$\overline{W}_i = W_i + (1 - \mathbf{m})i, \qquad i \geqslant 0.$$

Idée de preuve

$(W_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1)$, $k \geqslant -1$.

Étape 2.
Il s'agit donc de comprendre $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ sous la loi $\mathbb{P}[\cdot \mid W_n = -1]$.

Point important: $\mathbb{E}[W_1] = \mathbf{m} - 1 < 0$. On pose donc

$$\overline{W}_i = W_i + (1-\mathbf{m})i, \qquad i \geqslant 0.$$

Il s'agit donc d'étudier

$$\left(\overline{W}_0, \overline{W}_1, \ldots, \overline{W}_n \mid \overline{W}_n = (1-\mathbf{m})n - 1\right).$$

Idée de preuve

$(W_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1)$, $k \geqslant -1$.

Étape 2.
Il s'agit donc de comprendre $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ sous la loi $\mathbb{P}\left[\,\cdot \,|\, W_n = -1\right]$.

Point important: $\mathbb{E}\left[W_1\right] = \mathbf{m} - 1 < 0$. On pose donc

$$\overline{W}_i = W_i + (1 - \mathbf{m})i, \qquad i \geqslant 0.$$

Il s'agit donc d'étudier

$$\left(\overline{W}_0, \overline{W}_1, \ldots, \overline{W}_n \,|\, \overline{W}_n = (1 - \mathbf{m})n - 1\right).$$

Point crucial (Denisov, Dieker & Shneer '08) : pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left[\overline{W}_n \in [x, x+1)\right] \underset{x \to \infty}{\sim} n\mathbb{P}\left[\overline{W}_1 \in [x, x+1)\right].$$

Idée de preuve

$(W_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire de loi des sauts $\nu(k) = \mu(k+1)$, $k \geqslant -1$.

Étape 2.
Il s'agit donc de comprendre $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ sous la loi $\mathbb{P}[\cdot \,|\, W_n = -1]$.

Point important: $\mathbb{E}[W_1] = \mathbf{m} - 1 < 0$. On pose donc

$$\overline{W}_i = W_i + (1-\mathbf{m})i, \qquad i \geqslant 0.$$

Il s'agit donc d'étudier

$$\left(\overline{W}_0, \overline{W}_1, \ldots, \overline{W}_n \,|\, \overline{W}_n = (1-\mathbf{m})n - 1\right).$$

Point crucial (Denisov, Dieker & Shneer '08) : pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left[\overline{W}_n \in [x, x+1)\right] \quad \underset{x\to\infty}{\sim} \quad n\mathbb{P}\left[\overline{W}_1 \in [x, x+1)\right].$$

On dit que la loi de $\overline{W}_1$ est $[0,1)$ – sous-exponentielle.

Idée de preuve

On écrit $\overline{W}_n = \overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n$ et on note $\overline{\nu}$ la loi de $\overline{W}_1$.

Idée de preuve

On écrit $\overline{W}_n = \overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n$ et on note $\overline{\nu}$ la loi de $\overline{W}_1$.

Théorème (Loulakis & Armendáriz '11)

On note π_{n-1} la loi sur $\mathbb{R}^{n-1}$ de $\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n \,|\, \overline{W}_n = (1-\mathbf{m})n - 1\right)$, auquel on a enlevé la composante maximale.

Idée de preuve

On écrit $\overline{W}_n = \overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n$ et on note $\overline{\nu}$ la loi de $\overline{W}_1$.

Théorème (Loulakis & Armendáriz '11)

On note π_{n-1} la loi sur $\mathbb{R}^{n-1}$ de $\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n \mid \overline{W}_n = (1-\mathbf{m})n - 1\right)$, auquel on a enlevé la composante maximale. Alors :

$$\sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})} \left| \pi_{n-1}(A) - \overline{\nu}^{\otimes(n-1)}(A) \right| \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

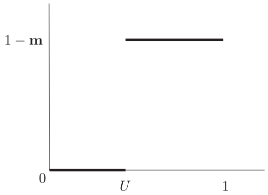
Idée de preuve

Conséquence :

Sous $\mathbb{P}\left[\,\cdot\,|\,\overline{W}_n = (1-\mathbf{m})n - 1\right]$,

$$\left(\frac{1}{n}\overline{W}_{[nt]};0 \leqslant t \leqslant 1\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad ((1-\mathbf{m})\mathbb{1}_{U\leqslant t};0 \leqslant t \leqslant 1),$$

où U est uniforme sur $[0,1]$:



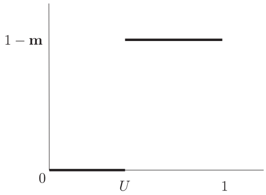
Idée de preuve

Conséquence :

Sous $\mathbb{P}\left[\,\cdot \,|\, \overline{W}_n = (1-\mathbf{m})n - 1\right]$,

$$\left(\frac{1}{n}\overline{W}_{[nt]}; 0 \leqslant t \leqslant 1\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad ((1-\mathbf{m})\mathbb{1}_{U \leqslant t}; 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

où U est uniforme sur $[0,1]$:



Or $W_i = \overline{W}_i - (1-\mathbf{m})i$.

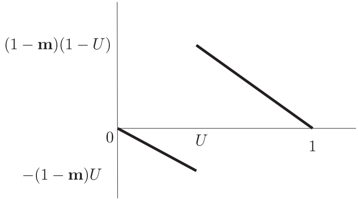
Idée de preuve

Conséquence :

Sous $\mathbb{P}[\cdot \mid W_n = -1]$,

$$\left(\frac{1}{n} W_{[nt]}; 0 \leqslant t \leqslant 1\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad (-(1-\mathbf{m})t + (1-\mathbf{m})\mathbb{1}_{U \leqslant t}, 0 \leqslant t \leqslant 1);$$

où U est uniforme sur $[0, 1]$:



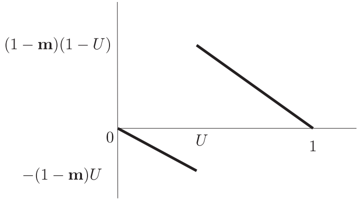
Idée de preuve

Conséquence :

Sous $\mathbb{P}\left[\,\cdot \mid W_n = -1\right]$,

$$\left(\frac{1}{n} W_{[nt]} ; 0 \leqslant t \leqslant 1\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(-(1-\mathbf{m})t + (1-\mathbf{m})\mathbb{1}_{U \leqslant t}, 0 \leqslant t \leqslant 1\right);$$

où U est uniforme sur $[0,1]$:



On conclut en appliquant une transformée de Vervaat. ∎

Application : fluctuations du degré maximal

On note $\Delta(\mathfrak{t}_n)$ le degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

Application : fluctuations du degré maximal

On note $\Delta(\mathfrak{t}_n)$ le degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

Corollaire

Il existe une suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ telle que :

$$\frac{\Delta(\mathfrak{t}_n) - (1-\mathbf{m})n}{B_n} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad -Y_1,$$

Application : fluctuations du degré maximal

On note $\Delta(\mathfrak{t}_n)$ le degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

Corollaire

Il existe une suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ telle que :

$$\frac{\Delta(\mathfrak{t}_n) - (1 - \mathbf{m})n}{B_n} \quad \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} \quad -Y_1,$$

où Y_1 est la loi au temps 1 d'un processus de Lévy Y d'exposant de Laplace $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y_t}\right] = e^{-t\lambda^{2 \wedge \theta}}$.

Application : fluctuations du degré maximal

On note $\Delta(\mathfrak{t}_n)$ le degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

Corollaire

Il existe une suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ telle que :

$$\frac{\Delta(\mathfrak{t}_n) - (1 - \mathbf{m})n}{B_n} \quad \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} \quad -Y_1,$$

où Y_1 est la loi au temps 1 d'un processus de Lévy Y d'exposant de Laplace $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y_t}\right] = e^{-t\lambda^{2 \wedge \theta}}$.

Remarques :

- $B_n \simeq n^{1/(2 \wedge \theta)}$.

Application : fluctuations du degré maximal

On note $\Delta(\mathfrak{t}_n)$ le degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

Corollaire

Il existe une suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ telle que :

$$\frac{\Delta(\mathfrak{t}_n) - (1-\mathbf{m})n}{B_n} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad -Y_1,$$

où Y_1 est la loi au temps 1 d'un processus de Lévy Y d'exposant de Laplace $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y_t}\right] = e^{-t\lambda^{2\wedge\theta}}$.

Remarques :

- $B_n \simeq n^{1/(2\wedge\theta)}$.
- Janson '12 a démontré ce résultat lorsque $\mu(n) \sim c/n^{\beta}$ avec $c > 0$, $\beta > 2$.

Application : fluctuations du degré maximal

On note $\Delta(\mathfrak{t}_n)$ le degré maximal de $\mathfrak{t}_n$.

Corollaire

Il existe une suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ telle que :

$$\frac{\Delta(\mathfrak{t}_n) - (1 - \mathbf{m})n}{B_n} \quad \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} \quad -Y_1,$$

où Y_1 est la loi au temps 1 d'un processus de Lévy Y d'exposant de Laplace $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y_t}\right] = e^{-t\lambda^{2 \wedge \theta}}$.

Idée de la preuve:

$\Delta(\mathfrak{t}_n) - (1 - \mathbf{m})n$ a grosso-modo la loi somme de $n - 1$ variables aléatoires centrées indépendantes dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice $2 \wedge \theta$.

III. 2) Localisation du sommet de degré maximal

Quelques notations

On note :

- $u_\star(t_n)$ le premier sommet de degré maximal de t_n,
- $|u_\star(t_n)|$ la hauteur de $u_\star(t_n)$,
- $\Delta(t_n)$ le degré de $u_\star(t_n)$,
- $U(t_n)$ l'indice de $u_\star(t_n)$.

Localisation de $u_\star(t_n)$

Théorème (K. 12')

(i) *Pour* $i \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left[U(t_n) = i\right] \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \qquad .$

Localisation de $u_\star(t_n)$

Théorème (K. 12')

(i) *Pour* $i \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left[U(t_n) = i\right] \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad (1-\mathbf{m}) \cdot \mathbb{P}_\mu\left[\zeta(\tau) \geqslant i+1\right]$.

Localisation de $u_\star(t_n)$

Théorème (K. 12')

(i) *Pour* $i \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left[U(t_n) = i\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\mathbf{m}) \cdot \mathbb{P}_\mu\left[\zeta(\tau) \geqslant i+1\right]$.

Remarques :

- Le point (i) se démontre par un argument d'absolue continuité en utilisant le corollaire concernant les fluctuations de $\Delta(t_n)$.

Localisation de $u_\star(t_n)$

Théorème (K. 12')

(i) *Pour* $i \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left[U(t_n)=i\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\mathbf{m})\cdot \mathbb{P}_\mu\left[\zeta(\tau)\geqslant i+1\right]$.

(ii) *Pour* $i \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left[|u_\star(t_n)|=i\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\mathbf{m})\mathbf{m}^i$.

Remarques :

- Le point (i) se démontre par un argument d'absolue continuité en utilisant le corollaire concernant les fluctuations de $\Delta(t_n)$.

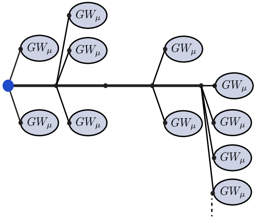
Localisation de $u_\star(t_n)$

Théorème (K. 12')

(i) *Pour* $i \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left[U(t_n) = i\right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} (1 - \mathbf{m}) \cdot \mathbb{P}_\mu\left[\zeta(\tau) \geqslant i + 1\right]$.

(ii) *Pour* $i \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left[|u_\star(t_n)| = i\right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} (1 - \mathbf{m})\mathbf{m}^i$.

Rappel : on a convergence locale vers



Remarques :

- Le point (i) se démontre par un argument d'absolue continuité en utilisant le corollaire concernant les fluctuations de $\Delta(t_n)$.

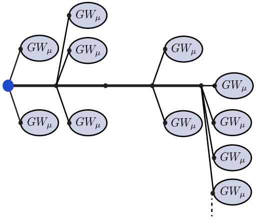
Localisation de $u_\star(t_n)$

Théorème (K. 12')

(i) *Pour* $i \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left[U(t_n) = i\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\mathbf{m}) \cdot \mathbb{P}_\mu\left[\zeta(\tau) \geqslant i+1\right]$.

(ii) *Pour* $i \geqslant 0$, $\mathbb{P}\left[|u_\star(t_n)| = i\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\mathbf{m})\mathbf{m}^i$.

Rappel : on a convergence locale vers



Remarques :

- Le point (i) se démontre par un argument d'absolue continuité en utilisant le corollaire concernant les fluctuations de $\Delta(t_n)$.
- Le point (ii) n'est pas une conséquence immédiate de la convergence locale (nécessite également (i)).

Stucture de $\mathfrak{t}_n$

Conséquence pratique :

$\mathfrak{t}_n$ est composé de :

- Un arbre $\mathcal{F}$ fini.
- Une forêt de Δ_n GW_μ arbres (indépendants de Δ_n), conditionnée à avoir en tout $(1-\mathbf{m})n$ sommets, où Δ_n vérifie :

$$\frac{\Delta_n-(1-\mathbf{m})n}{B_n} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad -Y_1.$$

III. 3) Conséquences

Hauteur de $\mathfrak{t}_n$

On note $\mathcal{H}(\mathfrak{t}_n)$ la hauteur de $\mathfrak{t}_n$.

Hauteur de $\mathfrak{t}_n$

On note $\mathcal{H}(\mathfrak{t}_n)$ la hauteur de $\mathfrak{t}_n$.

Théorème (K. 12')

Pour toute suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ de réels strictement positifs convergeant vers $+\infty$:

$$\mathbb{P}\left[\left|\mathcal{H}(\mathfrak{t}_n) - \frac{\ln(n)}{\ln(1/\mathbf{m})}\right| \leqslant \lambda_n\right] \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1.$$

Hauteur de t_n

On note $\mathcal{H}(t_n)$ la hauteur de t_n.

Théorème (K. 12')

Pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs convergeant vers $+\infty$:

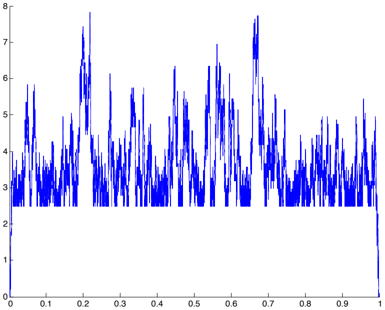
$$\mathbb{P}\left[\left|\mathcal{H}(t_n) - \frac{\ln(n)}{\ln(1/\mathbf{m})}\right| \leqslant \lambda_n\right] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 1.$$

Idée de la preuve:

Comme $\sum_i i \ln(i)\mu(i) < \infty$, d'après Heathcote, Seneta & Vere-Jones '67, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\mathbb{P}_\mu\left[\mathcal{H}(\tau) > k\right] \quad \underset{k\to\infty}{\sim} \quad c \cdot \mathbf{m}^k.$$

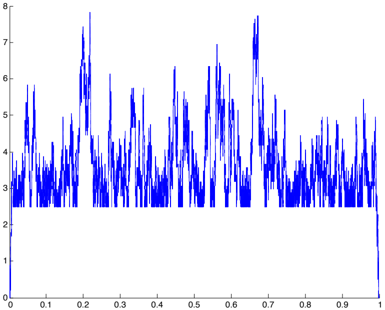
Fonction de contour de $\mathfrak{t}_n$



Fonction de contour de $\mathfrak{t}_n$

Théorème (K. 12')

Soit $(r_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de nombre réels strictement positifs.*

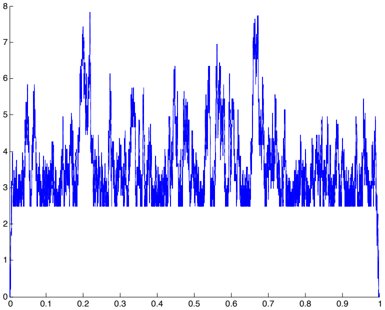


Fonction de contour de $\mathfrak{t}_n$

Théorème (K. 12')

Soit $(r_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite de nombre réels strictement positifs.*

(i) *Si* $r_n / \ln(n) \to \infty$, *alors* $(C_{2nt}(\mathfrak{t}_n)/r_n, 0 \leqslant t \leqslant 1)$ *converge en loi vers la fonction nulle sur* $[0,1]$ *quand* $n \to \infty$.



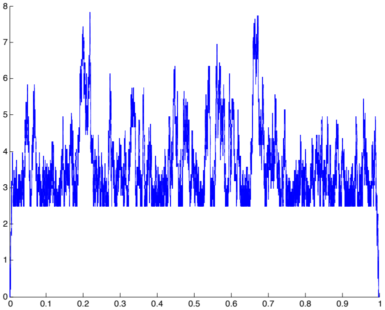
Fonction de contour de $\mathfrak{t}_n$

Théorème (K. 12')

Soit $(r_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite de nombre réels strictement positifs.*

(i) *Si* $r_n / \ln(n) \to \infty$, *alors* $(C_{2nt}(\mathfrak{t}_n)/r_n, 0 \leqslant t \leqslant 1)$ *converge en loi vers la fonction nulle sur* $[0, 1]$ *quand* $n \to \infty$.

(ii) *Sinon, la suite* $(C_{2nt}(\mathfrak{t}_n)/r_n, 0 \leqslant t \leqslant 1)$ *n'est pas tendue dans l'espace* $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.



IV. Extensions

Conjecture

On a :

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{H}(\mathfrak{t}_n)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(1/\mathbf{m})}.$$

Conjecture

On a :

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{H}(t_n)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(1/\mathbf{m})}.$$

Question

Que se passe-t-il dans le cas de μ non générique quelconque ?

Conjecture

On a :

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{H}(t_n)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(1/\mathbf{m})}.$$

Question

Que se passe-t-il dans le cas de μ non générique quelconque ?