Combinatoire probabiliste

La plupart des exos ont été tirés des liens suivants :

– http://ohkawa.cc.it-hiroshima.ac.jp/AoPS.pdf/probability%20problems2.pdf
– http://www.math.cmu.edu/~ploh/docs/math/mop2009/prob-comb.pdf

1 Exos à chercher pour mardi matin

Exercice 1. Soient $A_1, \dots, A_n$ et $B_1, \dots, B_n$ des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ tels que :

- pour tout i, on a $A_i \cap B_i = \emptyset$.
- pour tous $i \neq j$, on a $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset$. Montrer que pour tout nombre réel p tel que $0 \leqslant p \leqslant 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} p^{\mathrm{Card}(A_i)}(1-p)^{\mathrm{Card}(B_i)} \leqslant 1.$$

Exercice 2. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Aux OIM, il y a $3n$ participants qui parlent en tout n différentes langues, chaque participant parlant exactement trois langues. Montrer qu'on peut choisir $\lceil 2n/9 \rceil$ langues telles que chaque participant ne parle pas plus de deux langues parmi celles choisies.

NB : $\lceil 2n/9 \rceil$ est le plus petit entier supérieur à $2n/9$.

2 Exos à chercher individuellement en classe mardi matin

Exercice 3. (IMC 2002) 200 élèves participent à l'OIM. Ils doivent résoudre 6 problèmes. On suppose que chaque problème a été résolu correctement par au moins 120 particpants. Montrer qu'on peut trouver deux participants tel que chacun des 6 problèmes ait été résolu par au moins l'un des deux.

Exercice 4. (Bay Area Math Olympiad 2004) On considère n nombres réels, non tous nuls, tels que leur somme soit nulle. Montrer qu'on peut les ordonner sous la forme $a_1, a_2, \dots, a_n$ de sorte que

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0.$$

Cf http://mathcircle.berkeley.edu/newsitedocs/bamodocs/bamo2004examsol.pdf pour l'ex précédent.

Exercice 5. (IMO 1987) Soit $p_n(k)$ le nombre de permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ qui ont exactement k points fixes. Prouver que

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!.$$

3 TD du mardi après-midi

3.1 Interprétations probabilistes

Exercice 1. (IMO Shortlist 1987) Montrer qu'on peut colorier les éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 1987\}$ avec quatre couleurs de sorte qu'il n'existe pas de suite arithmétique monochromatique avec 10 termes.

Exercice 2. (Iran 2012) Soit $k \geqslant 1$ un entier. On note N_k le plus petit entier tel que tout coloriage avec deux couleurs des entiers de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N_k\}$ contienne une suite arithmétique monochrome de longueur k.

Prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $N_k \leqslant C \cdot 2^{k/2}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Cf `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=42&t=498509` pour l'ex précédent.

Exercice 3. (Olympiade de Leningrad 1987) Soient $A_1, \ldots, A_s$ des sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, M\}$. On suppose qu'il n'existe pas $i \neq j$ tels que $A_i \subset A_j$. On note $a_i = \mathrm{Card}(A_i)$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\binom{M}{a_i}} \leqslant 1.$$

Exercice 4. Le bac comporte n épreuves. Chaque candidat passe autant d'épreuves qu'il veut, et choisit de composer pour chaque épreuve soit en latin, soit en grec (il peut changer de langue suivant les épreuves). On suppose que pour deux épreuves différentes, il existe un candidat qui a choisi de passer ces deux épreuves en composant dans des langues différentes. On suppose finalement que chaque épreuve est passée par au plus dix candidats. Quelle est la valeur maximale de n ?

Cf `http://www.math.ust.hk/excalibur/v14_n3.pdf` pour cet exo.

3.2 Linéarité de l'espérance

Exercice 1. (Russia 1996) La douma compte 1600 députés qui ont formé 16000 commissions, chacune comportant 80 personnes. Prouver qu'il existe deux commissions qui comportent au moins quatre députés en commun.

Exercice 2. Soit G un graphe avec n sommets, de degré moyen d. Montrer qu'on peut trouver un sous-ensemble S de sommets non adjacents de cardinal au moins $n/(d+1)$.

Exercice 3. On considère un tournoi d'échecs réunissant 40 joueurs. On suppose que 80 matchs ont eu lieu, et deux joueurs ne peuvent pas jouer l'un contre l'autre plus d'une fois. Trouver le plus grand entier n tel qu'on puisse toujours choisir n joueurs tels que deux quelconques parmi eux n'ont pas joué ensemble.

Exercice 4. On considère n participants à un tournoi, chaque participant rencontrant chaque autre une unique fois, l'issue de la rencontre étant soit une victoire soit une défaite. Si on ordonne les joueurs de la gauche vers la droite, on dit que cet ordre est *sympathique* si chaque joueur (sauf le dernier) a battu le joueur immédiatement à sa droite. Montrer qu'il existe un tournoi avec au moins $n!/2^{n-1}$ ordres sympathiques.

Exercice 5. (Shortlist IMO 1994) Soit A un sous-ensemble de n résidus modulo n^2. Prouver qu'il existe un sous-ensemble B de cardinal n de résidus modulo n^2 tels qu'au moins la moitiés des résidus modulo n^2 puissent s'écrire sous la forme $a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

Exercice 6. Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de norme égale à 1. Montrer qu'il existe une suite $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ d'éléments de $\{-1, 1\}$ tels que le vecteur

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i v_i$$

soit de norme inférieure ou égale à $\sqrt{n}$.

Exercice 7. Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de norme inférieure ou égale à 1. Soient $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ des nombres réels. On pose $w = p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n$. Montrer qu'il existe $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{0, 1\}$ tels que si $v = \epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n$ alors la norme de $w - v$ est inférieure ou égale à $\sqrt{n}/2$.