# Exercices de géométrie

*Stage olympique de Bois-le-Roi, avril 2006*

Igor Kortchemski

## Exercices vus en cours

**Exercice 1.** (IMO 2000) Soient $\Omega_1$ et $\Omega_2$ deux cercles qui se coupent en $M$ et en $N$. Soit $\Delta$ la tangente commune aux deux cercles, qui est plus proche de $M$ que de $N$. $\Delta$ est tangente à $\Omega_1$ en $A$ et à $\Omega_2$ en $B$. La droite passant par $M$ et parallèle à $\Delta$ rencontre $\Omega_1$ en $C$ et $\Omega_2$ en $D$. Soient $E$ l'intersection des droites $(CA)$ et $(BD)$, $P$ le point d'intersection de droites $(AN)$ et $(CD)$ et $Q$ le point d'intersection des droites $(BN)$ et $(CD)$. Montrer que $EP = EQ$.

---

**Exercice 2.** (IMO 1994) Soit $ABC$ un triangle isocèle vérifiant $AB = AC$. Soient $M$ le milieu de $[BC]$ et $O$ le point de la droite $(AM)$ tel que $(OB)$ soit orthogonale à $(AB)$. Soient $Q$ un point de $]BC[$, $E$ un point de $(AB)$ et $F$ un point de $(AC)$ tels que $E$, $Q$ et $F$ soient alignés. Montrer que $(OQ)$ est orthogonale à $(EF)$ si, et seulement si, $QE = QF$.

---

**Exercice 3.** (Shortlist 1994) Soient $C$ et $D$ deux points d'un demi-cercle de centre $O$. La tangente en $C$ (respectivement en $D$) au demi-cercle coupe la prolongation du diamètre de ce demi-cercle en $B$ (respectivement en $A$). On suppose de plus que les points $A$ et $B$ ne sont pas du même côté de $O$ sur la prolongation du diamètre. Soit $E$ l'intersection des droites $(AC)$ et $(BD)$ et soit $F$ le pied de la hauteur issue de $E$ dans le triangle $BEA$. Montrer que $(EF)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{CFD}$.

---

**Exercice 4.** (Shortlist 1998) Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ tel que $\widehat{B} < \widehat{C}$. La tangente en $A$ à son cercle circonscrit $\Omega$ rencontre $(BC)$ en $D$. Soient $E$ le symétrique de $A$ par rapport à $[BC]$, $X$ le pied de la perpendiculaire issue de $A$ à $(BE)$, et $Y$ le milieu de $[AX]$. On suppose que la droite $(BY)$ rencontre $\Omega$ aussi en $Z$. Montrer que $(BD)$ est tangente au cercle circonscrit du triangle $ADZ$.

---

## Recueil d'exercices de géométrie

**Exercice 5.** (Shortlist 1995) Deux triangles équilatéraux sont inscrits dans un cercle de rayon $r$. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie contenant tous les points intérieurs aux deux triangles. Montrer que $2A \geq \sqrt{3}r^2$.

---

**Exercice 6.** (Shortlist 1991) Soit $ABC$ un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit $M$ le milieu de $[BC]$, $P$ un point du segment $[AM]$ tel que $PM = BM$, $P$ le point de $[BC]$ tel que les droites $(PH)$ et $(BC)$ soient orthogonales. Soient finalement $Q$ l'intersection de $[AB]$ avec la perpendiculaire à $(PB)$ passant par $H$ et $R$ l'intersection de $[AC]$ avec la perpendiculaire à $(DC)$ passant par $H$. Montrer que le cercle circonscrit du triangle $QHR$ est tangent au côté $BC$ au point $H$.

---

**Exercice 7.** Soit $PQ$ un diamètre d'un cercle et $RS$ une corde de ce cercle qui est orthogonale à $(PQ)$ en $A$. $C$ est un point du cercle et $B$ est un point intérieur au cercle de sorte que les droites $(BC)$ et $(PQ)$ soient parallèles et qui vérifie $BC = RA$. $K$ est la projection orthogonale de $A$ sur $(QC)$ et $L$ est la projection orthogonale de $B$ sur $(QC)$. Montrer que les triangles $ACK$ et $BCL$ ont même aire.

---

**Exercice 8.** Soit $ABC$ un triangle rectangle en $C$. Soit $K$ le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ACK}$ coupe le côté $[AB]$ en $E$. La parallèle à $(EC)$ passant par $B$ coupe $(KC)$ en $F$. Montrer que $(EF)$ recoupe $(AC)$ en son milieu.

---

**Exercice 9.** Soit $[AB]$ le diamètre d'un cercle $\Omega$ sur lequel on place un point $K$. La perpendiculaire à $(AB)$ passant par $K$ coupe le cercle en un point noté $L$. Le cercle $\Omega_A$ est tangent à $[KL]$, $[KA]$ et $\Omega$. Le point de tangence entre $\Omega_A$ et $(AB)$ est noté $A_1$. Le cercle $\Omega_B$ est tangent à $[KL]$, $[KB]$ et $\Omega$. Le point de tangence entre $\Omega_B$ et $(AB)$ est noté $B_1$. Montrer que $\widehat{A_1LB_1} = 45°$.

---

**Exercice 10.** Le cercle inscrit au triangle $ABC$ est tangent au côté $[AC]$ en $D$. $[DM]$ est un diamètre de ce cercle inscrit. L'intersection des droites $(BM)$ et $(AC)$ est notée $K$. Montrer que $AK = DC$.

---

**Exercice 11.** Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux diamètres orthogonaux d'un même cercle $\Omega$. $M$ est un point extérieur à $\Omega$. Les tangentes à $\Omega$ passant par $M$ coupent $(AB)$ en $H$ et en $E$. La droite $(MC)$ (respectivement $(MD)$) coupe $(AB)$ en $F$ (respectivement en $K$). Montrer que $EF = KH$.

---

**Exercice 12.** Soit $ABC$ un triangle non isocèle. $M$ est le milieu de $[BC]$, $I$ est le centre du cercle inscrit à $ABC$ et $H$ est le pied de la hauteur issue de $A$. On note $E$ l'intersection des droites $(MI)$ et $(AH)$. Montrer que la longueur $AE$ est égale au rayon du cercle inscrit à $ABC$.

---

**Exercice 13.** (IMO 1996) Soit $P$ un point intérieur à un triangle $ABC$ tel que :

$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{ADC} - \widehat{ABC}.$$

Montrer que les bissectrices issues des angles $ABP$ et $ACP$ ainsi que la droite $(AP)$ sont concourantes.

---

**Exercice 14.** (Shortlist 1994) Une droite  ne rencontre pas un cercle $\Omega$ de centre $O$. $E$ est le seul point de  tel que $(OE)$ soit orthogonale à . $M$ est un point quelconque de , différent de $E$. Les tangentes à $\Omega$ passant par $M$ le rencontrent en $A$ et en $B$. $C$ est le point de $(MA)$ tel que les droites $(EC)$ et $(MA)$ soient orthogonales. $D$ est le projeté orthogonal de $E$ sur $[MB]$. L'intersection des droites $(CD)$ et $(OE)$ est notée $F$. Montrer que le lieu géométrique de $F$ est indépendant de celui de $M$.

## Solutions des exercices

**Solution de l'exercice 1.** Il suffit d'être logique, qualité qui permet de résoudre nombre d'exercices de géométrie : une chasse aux angles s'impose, et montre que $\widehat{ABE} = \widehat{CDE} = \widehat{MBA}$, la dernière égalité étant d'une importance capitale. De même, $\widehat{BAE} = \widehat{MAB}$. Ces égalités impliquent que $M$ et $E$ sont images l'un de l'autre par la symétrie par rapport à la droite $(AB)$. Les droites $(ME)$ et $(AB)$ sont orthogonales, puis les droites $(ME)$ et $(PB)$ sont orthogonales.

Il faut également savoir reconnaître les situations classiques : ici, en notant $T$ l'intersection des droites $(MN)$ et $(AB)$, il faut savoir que $TA = TB$ (cela se retrouve en calculant la puissance de $T$ par rapport aux deux cercles : $TA^2 = TM.TN = TB^2$). Le théorème de Thalès montre alors que $M$ est le milieu de $[PB]$. En somme, $(ME)$ est la médiatrice de $[PQ]$. $E$ est donc bien équidistant de $P$ et de $Q$.

---

---

**Solution de l'exercice 2.** Pour montrer une équivalence, il est plus prudent de montrer en premier lieu le sens qui paraît le plus facile et de terminer par l'autre sens.

Pour le sens direct, on prouve que $EOF$ est isocèle en $O$. En effet, $BEQO$ est inscriptible, d'où $\widehat{QEO} = \widehat{QBO} = \widehat{QCO} = \widehat{QFO}$, car $(OC)$ étant orthogonale à $(AC)$, $OQCF$ est inscriptible.

Pour la réciproque, supposons par l'absurde que $(OQ)$ n'est pas orthogonale à $(EF)$. Motivés par le résultat du premier sens, on trace la droite perpendiculaire à $(OQ)$ passant par $Q$, qui coupe $(AB)$ en $E'$ et $(AC)$ en $F'$. $Q$ est alors à la fois le milieu de $[EF]$ et $[E'F']$ : $EE'FF'$ est donc un parallélogramme et $(EE')$ est parallèle à $(FF')$, ce qui est contradictoire et ce qui achève le problème.

---

**Solution de l'exercice 3.** Ici, une bonne figure permet de conjecturer que les droites $(BC)$, $(AD)$ et $(EF)$ sont concourantes. Pour cela, notons $P$ le point d'intersection des droites $(BC)$ et $(AD)$, et $H$ le projeté de $P$ sur $[AB]$. Pour prouver que $H = F$, il suffit de prouver que les droites $(PH)$, $(BD)$ et $(AC)$ sont concourantes (pourquoi ?). L'utilisation du théorème de Céva apparaît naturellement ; on souhaite prouver que :

$$\frac{AH}{HB}.\frac{BC}{CP}.\frac{PD}{DA} = 1.$$

Mais $PC = PD$. Il suffit donc de prouver que :

$$\frac{BH}{BC} = \frac{AH}{AD}.$$

Malheureusement, les triangles $BHC$ et $AHD$ ne sont pas ici sembables. Cependant, une petite chasse aux angles montre que $PAH$ et $OAD$ sont sembables, ainsi que $PBH$ et $OBC$. On en déduit :

$$\frac{AH}{AD} = \frac{HP}{DO} \quad \text{et} \quad \frac{BH}{BC} = \frac{HP}{CO}.$$

On utilise l'égalité de $OC$ et de $OD$ pour en déduire que $\frac{BH}{BC} = \frac{AH}{AD}$. $H$ et $F$ sont donc confondus.

Pour finir, il faut remarquer que $OPDH$ est inscriptible ainsi que $CPHO$ ce qui donne les égalités successives :

$$\widehat{PHD} = \widehat{POD} = \widehat{POC} = \widehat{PHC},$$

et montre que $(EF)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{CFD}$.

---

**Solution de l'exercice 4.** En raisonnant à l'envers, on s'aperçoit qu'il suffit de prouver que $\widehat{AZH}$ est un angle droit, et c'est la partie délicate du problème. Pour cela, le point clé est d'introduire le point $G$, point diamétralement opposé à $A$, puisque l'on va prouver que $G$, $H$ et $Z$ sont alignés. En effet, $\widehat{ABX} = \widehat{ABE} = \widehat{AGE}$, et les triangles $AGE$ et $AXB$ sont semblables. Considérons donc la similitude directe $s$ de centre $A$ qui envoie $AGE$ sur $ABX$. $H$ est le milieu de $[AE]$ et $Y$ le milieu de $[AX]$, ce qui prouve que $s(H) = Y$. Il en découle que les triangles $AGH$ et $ABY$ sont semblables, et en terme d'angles, on a $\widehat{ABY} = \widehat{AGH}$. Les droites $(BY)$ et $(GH)$ s'intersectent donc sur $\Omega$, plus précisément en $Z$. Puisque la droite $(DE)$ est tangente à $\Omega$ en $E$, on obtient : $\widehat{ZED} = \widehat{ZAE} = \widehat{ZHD}$. Cela montre que $ZHED$ est inscripible. Une petite chasse aux angles permet de conclure : $\widehat{ZDH} = \widehat{ZEA} = \widehat{ZAD}$, d'où le résultat.

---

**Solution de l'exercice 5.** Notons $ABC$ et $A'B'C'$ les deux triangles en question, $A'$ se situant sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$. On remarque que la figure possède de nombreux axes de symétrie. Pour exploiter ce fait, introduisons les points $Q$, intersection de $(A'C')$ avec $(AB)$, et $P$, intersection de $(A'B')$ avec $(AB)$. Par symétrie :

$$\mathcal{A} = \text{Aire}(ABC) - 3\text{Aire}(A'QP).$$

Toujours par symétrie, $A'Q = AQ$ et $A'P = PB$. Le triangle $A'QP$ est donc de périmètre constant, égal à $\sqrt{3}r$. Or un triangle de périmètre constant est d'aire maximale lorsqu'il est équilatéral (pourquoi ?). On en déduit que $\mathcal{A} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}r^2$.

---

**Solution de l'exercice 6.** Compte tenu des hypothèses, le triangle $PBC$ est rectangle en $P$. Comme $(PH)$ est orthogonale à $(BC)$ au point $H$, $\widehat{Q'R'H} = \widehat{QHB}$. Il suffit donc de prouver que les droites $(QR)$ et $(Q'R')$ sont parallèles. Les nombreuses droites parallèles nous invitent à l'utilisation du théorème de Thalès. On introduit donc naturellement les points $R''$, intersection des droites $(PC)$ et $(AB)$, et $Q''$, intersection des droites $(PB)$ avec $(AC)$.
Les droites $(QQ')$ et $(R''P)$ sont parallèles. Il s'ensuit que :

$$\frac{QQ'}{Q'H} = \frac{R''P}{PC}.$$

De même, les droites $(QQ')$ et $(R''P)$ sont parallèles. Il s'ensuit que :

$$\frac{RR'}{R'H} = \frac{Q''P}{PB}.$$

Finalement, les droites $(R''Q'')$ et $(BC)$ étant parallèles, on obtient que $\frac{PR''}{PC} = \frac{PQ''}{PB}$. Il en découle que $\frac{QQ'}{Q'H} = \frac{RR'}{R'H}$. Les droites $(QR)$ et $(Q'R')$ sont alors parallèles, ce qu'on voulait démontrer.

---

**Solution de l'exercice 7.** On note $\alpha = \widehat{PQC}$. Par parallélisme, $\widehat{LCB} = \alpha$. L'idée est de voir que les deux aires considérées peuvent se "projeter" sur $(QC)$. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
2.\text{Aire(ACK)} &= CK.AK \\
&= (AP\cos(\alpha))(AQ\sin(\alpha)) \\
&= AR^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= BC^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= BL.CL \\
&= 2.\text{Aire(BLC)}.
\end{aligned}$$

---

**Solution de l'exercice 8.** Soit $D$ l'intersection de $(EF)$ et de $(AC)$. Les trois points $D$, $E$ et $F$ sont ainsi alignés, et l'on se retrouve dans une configuration propice à utiliser le théorème de Menelaus, qui donne :

$$\frac{AD}{CD}.\frac{CF}{FK}.\frac{KE}{AE} = 1.$$

Il suffit ainsi de montrer que $\frac{CF}{FK} = \frac{AE}{KE}$. On cherche donc à exprimer les deux rapports d'une autre manière.
Une petite chasse aux angles permet d'obtenir que $BC = BE$, et le théorème de Thalès fournit $\frac{CF}{KF} = \frac{EB}{KB}$. D'où :

$$\frac{CF}{KF} = \frac{BC}{KB}.$$

D'autre part, dans le triangle $ACK$, $(CE)$ étant bissectrice de l'angle $\widehat{ACK}$, $\frac{AE}{KE} = \frac{AC}{CK}$ (propriété à connaître absolument !). Puisque les triangles $ACK$ et $BCK$ sont semblables, on obtient finalement :

$$\frac{AE}{KE} = \frac{BC}{BK}.$$

En définitive, $\frac{CF}{KF} = \frac{AE}{KE}$, ce qui entraîne $AD = CD$.

---

**Solution de l'exercice 9.** Une bonne figure est ici fondamentale pour remarquer que $AL = AB_1$ et que $BA_1 = BL$. Une chasse aux angles montre que si ces égalités étaient vérifiées, la conclusion s'en suiverait. Montrons donc que $AL = AB_1$.

Pour cela, notons $P$ (respectivement $Q$) le point de tangence entre $\Omega_B$ et $[KL]$ (respectivement $\Omega$), et $O_B$ le centre de $\Omega_b$. La première chose à voir est le fait que $A$, $P$ et $Q$ sont alignés. En effet, le parallelisme de $(AO)$ et de $(PO_B$ montre que $\widehat{AOQ} = \widehat{PO_BQ}$, et le caractère isocèle de $AOQ$ et de $PO_BQ$ montre que les droites $(AQ)$ et $(PQ)$ sont confondues.

Une égalité de distances en rapport avec deux cercles nous suggère l'utilisation de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
AB_1^2 &= AP.AQ \\
&= AP.(AP + AQ) = AP^2 + AP.AQ \\
&= (AK^2 + KP^2) + AP.AQ \\
&= AK^2 + KP^2 + PL.PM \\
&= AK^2 + KP^2 + (LK - PK).(LK + PK) \\
&= AK^2 + LK^2 \\
&= AL^2,
\end{aligned}$$

et finalement, $AB_1 = AL$. On montre de même que $BL = BA_1$, ce qui termine l'exercice.

---

**Solution de l'exercice 10.** Pour connaître la position du point $K$, considérons l'homothétie de centre $B$, qui envoie le cercle inscrit sur le cercle exinscrit du triangle $ABC$ tangent au côté $[AC]$. Elle envoie le point $M$ sur ce point de tangence. Or $K$, $M$ et $B$ son alignés, ce qui prouve que l'image de $M$ est $K$. $K$ est donc le point de tangence entre le cercle exinscrit du triangle $ABC$ tangent à ce triangle en $[AC]$, et le côté $[AC]$. Les distances $AK$ et $DC$ ce calculent alors aisément en fonction des côtés de $ABC$ : on trouve que $AK = DC = \frac{a+b-c}{2}$.

---

**Solution de l'exercice 11.** Il suffit de considérer l'homothétie de centre $M$ qui envoie la droite $(AB)$ sur la droite tangente à $\Omega$ en $C$ et d'utiliser l'exercice précédent.

---

**Solution de l'exercice 12.** Soit $P$ le point de tangence entre le cercle inscrit et $[BC]$. Le lecteur qui aura vu les deux exercices précédents introduira le point $Q$, point diamétralement opposé à $P$ sur le cercle inscrit. On sait que $BR = PC$. Or $M$ est le milieu de $[BC]$. Il en découle que $RM = MP$. Or $I$ est le milieu de $[PQ]$. Les droites $(AR)$ et $(ME)$ sont ainsi parallèles, et $QAEO$ est un parallélogramme, d'où la conclusion.

---

**Solution de l'exercice 13.** Le point clé est évidemment d'interpréter l'égalité $\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{ADC} - \widehat{ABC}$. Pour cela, les deux propriétés suivantes sont importantes :

- Soit $ABP$ un triangle, et $W_1$ l'intersection de la bissectrice issue de l'angle $\widehat{ABP}$ avec $[AP]$. Alors $\frac{AW_1}{W_1P} = \frac{BA}{BP}$, propriété fondamentale rencontrée précedemment.
- Soit $ABC$ un triangle, $X$ (respectivement $Y$ et $Z$) le projeté orthogonal de $P$ sur $[BC]$ (respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$). Alors $\widehat{XZY} = \widehat{APB} - \widehat{C}$ et $PA = \frac{YZ}{\sin \widehat{A}}$, ce que le lecteur vérifiera et retiendra facilement.

Revenons au problème initial. Notons $W_1$ (respectivement $W_2$) l'intersection de la bissectrice issue de l'angle $\widehat{ABP}$ (respectivement de l'angle $\widehat{ACP}$) avec $[AP]$. Il s'agit de montrer que $W_1 = W_2$. D'après la première propriété, il suffit de prouver que $\dfrac{AC}{PC} = \dfrac{AB}{BP}$. En conservant les notations de la deuxième propriété, compte tenu des hypothèses, il vient que $\widehat{YZX} = \widehat{ZYX}$, donc que $ZX = XY$. Or $PB = \frac{ZX}{\sin\widehat{B}}$ et $PC = \frac{XY}{\sin\widehat{C}}$. D'où :

$$PB.\sin\widehat{B} = PC.\sin\widehat{C}.$$

Mais d'après la loi des sinus :

$$AC.\sin\widehat{C} = AB.\sin\widehat{B}.$$

L'égalité $\dfrac{AC}{PC} = \dfrac{AB}{BP}$ en est une conséquence, ce qui conclut.

---

**Solution de l'exercice 14.** Pour résoudre cet exercice difficile, introduisons $G$ l'intersection de $(OM)$ et de $(AB)$, et $H$ l'intersection de $(OE)$ avec $(AB)$. Le quadrilatère $GHEM$ est inscriptible. D'où $OH.OE = OG.OM$. Or les triangles $AOG$ et $MOA$ sont semblables, ce qui implique que $OG.OM = OA^2$. Et donc :

$$OH = \frac{OA^2}{OE},$$

qui est une constante. Le lieu géométrique de $H$ est indépendant de celui de $M$.

Notons $K$ l'intersection des droites $(CD)$ et $(AB)$. Montrons à présent que $\widehat{AKE} = 90°$ et que $F$ est le milieu de $[EH]$. Le pentagone $EMAOB$ est inscriptible et $EMCD$ est inscriptible. Alors :

$$\widehat{KAE} = \widehat{BAE} = \widehat{BME} = \widehat{DME} = \widehat{DCE} = \widehat{KCE}.$$

$ACEK$ est par conséquent inscriptible, et $\widehat{AKE} = 90°$. Or $\widehat{BDE} = 90°$. Le quadrilatère $DBKE$ est donc aussi inscriptible. Alors, en gardant en tête que $(OM)$ et $(BE)$ sont parallèles :

$$\widehat{DKE} = \widehat{DBE} = \widehat{MBE} = \widehat{MOE} = \widehat{OEK}.$$

Et finalement, le triangle $HKE$ est rectangle en $K$ et est tel que $\widehat{FKE} = \widehat{FEK}$. La conclusion s'impose : $F$ est le milieu de $[EH]$. Les deux points $E$ et $H$ étant fixes, le lieu géométrique de $F$ est indépendant de celui de $M$.