

Corrigé du test – Équations fonctionnelles

Mardi 29 juillet 2003

Exercice 1.

Soit f une solution éventuelle.

Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 0$.

Pour $x = -y \neq 0$, il vient alors $0 = f(0) = 2x(f(x) + f(-x))$, d'où $f(-x) = -f(x)$ et f est impaire.

En remplaçant y par $-y$ dans l'équation fonctionnelle, on en déduit que, pour tous réels x, y , $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$ et $f(x^2 - y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$. Par soustraction, il vient alors $xf(y) = yf(x)$. En particulier, pour $y = 1$ on obtient $f(x) = xf(1)$, ce qui assure que f est linéaire.

Réciproquement, il est facile de vérifier que toute fonction linéaire est bien une solution du problème.

Exercice 2.

Quelques recherches rapides montrent que la fonction $x \mapsto x^2$ est une solution du problème, et que si f est une solution alors, pour toute constante réelle k la fonction $x \mapsto kf(x)$ l'est également.

Soit donc f une solution éventuelle.

- Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 0$. Mais alors, pour tout réel y , en choisissant $x = 0$, on a $f(y) + f(-y) = 2f(x)$ ce qui montre que f est paire.

- Pour $y = nx$, il vient $f((n+1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n-1)x)$ pour tout réel x et tout entier n . Ce type de relation nous incite fortement à utiliser une récurrence. Reste à intuiter la formule à prouver... Or, on voit vite que $f(2x) = 4f(x)$, $f(3x) = 9f(x)$, etc... ça commence à devenir clair.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Supposons que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on ait $f(kx) = k^2f(x)$. Alors :

$$f((n+1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n-1)x) = (2 + 2n^2 - (n-1)^2)f(x) = (n+1)^2f(x)$$

ce qui prouve le résultat au rang $n+1$. Puisque f est paire, on en déduit que, pour tout réel x et tout entier n , on a

$$f(nx) = n^2f(x) \tag{1}$$

La remarque initiale nous indique que l'on n'a aucune chance de déterminer $f(1)$. Qu'à cela ne tienne, posons $f(1) = a$, et considérons le comme un paramètre.

D'après (1), on a donc $f(n) = an^2$, pour tout entier n . Mais alors, pour tous entiers p, q avec $q \neq 0$, il vient (toujours d'après (1)) :

$$ap^2 = f(p) = f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = q^2 f\left(\frac{p}{q}\right)$$

c.à.d. $f(x) = ax^2$ pour tout rationnel x .

Il ne reste plus qu'à utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et la continuité de f pour conclure. Soit x un réel. Soit (x_n) une suite de rationnels qui converge vers x . Alors, puisque f est continue en x , on a : $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = ax^2$.

Et finalement, compte-tenu des remarques initiales, les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2$, où a est une constante réelle.

Exercice 3.

Soit f une solution éventuelle.

- Commençons par remarquer que f est injective : en effet, si $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $f(a) = f(b)$, alors $3a = f(f(f(a))) + f(f(a)) + f(a) = f(f(f(b))) + f(f(b)) + f(b) = 3b$. D'où $a = b$.

- Pour $n = 0$, puisque $f(0)$, $f(f(0))$ et $f(f(f(0)))$ appartiennent à $\mathbb{N}$ et vérifient $f(f(f(0))) + f(f(0)) + f(0) = 0$, c'est donc que $f(0) = 0$.

- Pour $n = 1$, les nombres $f(1)$, $f(f(1))$ et $f(f(f(1)))$ appartiennent à $\mathbb{N}^*$ (puisque $f(0) = 0$ et f est injective) et vérifient $f(f(f(1))) + f(f(1)) + f(1) = 3$, c'est donc que $f(1) = 1$.

On voit apparaître la récurrence : soit $n \geq 1$ fixé. Supposons que, pour tout $p \in \{0, \dots, n-1\}$, on ait $f(p) = p$. Alors, puisque f est injective, les nombres $f(n)$, $f(f(n))$ et $f(f(f(n)))$ sont tous au moins égaux à n , et donc $f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) \geq 3n$. L'équation fonctionnelle nous dit que l'on est dans le cas d'égalité, et donc que $f(n) = n$.

Réciproquement, l'identité est clairement une solution du problème.