Le 12 octobre 2013

Systèmes de vote

Partie I : exemples de systèmes de vote

Dix personnes, voulant choisir la destination d'un voyage, hésitent entre Ankara, Berlin et Cherbourg. Elles décident de voter et essaient trois méthodes de vote différentes.

Méthode 1 : chaque personne vote pour sa ville préférée. La ville ayant reçu le plus grand nombre de voix l'emporte. C'est le structin majoritaire uninominal à un tour.

Méthode 2 : chaque personne vote contre la ville qu'elle aime le moins. La ville avec le moins de votes contre l'emporte.

Méthode 3 : chaque personne apporte deux points à sa ville préférée, un seul point à la deuxième ville qu'elle préfère et aucun point à la troisième. La ville avec le plus de points l'emporte. C'est la méthode de Borda.

Parmi les dix personnes :
- 2 préfèrent Ankara puis Berlin puis Cherbourg
- 3 préfèrent Ankara puis Cherbourg puis Berlin
- 4 préfèrent Berlin puis Cherbourg puis Ankara
- 1 préfère Cherbourg puis Berlin puis Ankara

1. Qui gagne avec la méthode 1 ?

2. Qui gagne avec la méthode 2 ?

3. Qui gagne avec la méthode 3 ?

4. * On remplace la méthode 3 par un vote majoritaire uninominal à deux tours : au premier tour, on élimine la ville qui a reçu le moins de voix. Un nouveau vote est organisé entre les deux villes restantes et la ville avec le plus de voix l'emporte.
Pouvez-vous trouver une configuration avec neuf personnes telle que la ville choisie soit différente pour chacune des trois méthodes ?

Partie II : le théorème d'Arrow

On suppose maintenant que m personnes votent. On les appelle $P_1, ..., P_m$. Il y a n choix possibles : $C_1, ..., C_n$.
On s'intéresse ici aux méthodes de vote qui permettent de classer les uns par rapport aux autres les n choix possibles.

1. On reprend la méthode de Borda décrite dans la partie I. On classe les trois villes candidates en fonction du nombre de points obtenus par chacune. Dans la configuration de la partie I, quel serait le classement final obtenu ?

On dit que la méthode de vote est unanime si, lorsque tout le monde préfère C_i à C_j, C_i se trouve devant C_j dans le classement final.

2. Montrer que la méthode de Borda est unanime.

On dit que la méthode de vote est <u>indifférente aux options non-pertinentes</u> si, pour tous i et j différents, lorsque les personnes changent d'opinion en gardant la même préférence entre C_i et C_j, cela ne change pas le classement final de C_i par rapport à C_j.

3. On reprend l'exemple de la partie I avec la méthode de Borda mais une configuration légèrement différente :
- 2 préfèrent Ankara puis Berlin puis Cherbourg
- 3 préfèrent Ankara puis Cherbourg puis Berlin
- 4 préfèrent Berlin puis Ankara puis Cherbourg
- 1 préfère Cherbourg puis Berlin puis Ankara

Quel est cette fois le résultat ? En déduire que la méthode de Borda n'est pas indifférente aux options non-pertinentes.

On dit que la méthode de vote est une <u>dictature</u> si le classement final est celui de l'une des m personnes, toujours la même (c'est-à-dire qu'une personne décide pour toutes les autres).

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1 (Arrow) *Si $n \geq 3$, une méthode de vote unanime et indifférente aux options non-pertinentes est nécessairement une dictature.*

4. Expliquer pourquoi on demande $n \geq 3$.
Pour démontrer le théorème, on suppose qu'on a choisi une méthode de vote unanime et indifférente aux options non-pertinentes.

5. On regarde une configuration S où tout le monde a C_1 comme choix préféré ou comme choix moins aimé.
On va montrer que, dans le classement final, C_1 doit être classé en premier ou en dernier.
On raisonne par l'absurde et on suppose que ce n'est pas le cas. Alors, il existe $i \neq 1$ tel que, dans le classement final, C_i arrive devant C_1. Il existe aussi $j \neq 1$ tel que, dans le classement final, C_j arrive derrière C_1.
a) On regarde la configuration S' qui est la même que S, à part que les personnes qui préféraient C_i à C_j ont échangé, dans leur ordre de préférence, C_i avec C_j. Montrer que, dans le classement final de S', C_j doit arriver devant C_i.
b) En utilisant l'indifférence aux options non-pertinentes pour 1 et i, montrer que C_i arrive devant C_1 dans le classement final de S'.
c) Montrer que, dans le classement final de S', C_1 arrive devant C_j.
d) Pourquoi est-ce absurde ?

6. Pour tout m' allant de 0 à m, on appelle $S^{(1)}_{m'}$ la configuration où les m' premières personnes préfèrent C_1 puis C_2 puis C_3 etc. et les $m - m'$ dernières personnes préfèrent C_2 puis C_3 etc. puis C_n puis C_1.
Montrer qu'il existe $m(C_1)$ tel que, pour la configuration $S^{(1)}_{m(C_1)-1}$, C_1 arrive dernier du classement final et, pour la configuration $S^{(1)}_{m(C_1)}$, C_1 arrive premier.

7. Soient i, j différents tels que $i \neq 1$ et $j \neq 1$. On va montrer que, si la personne $m(C_1)$ préfère C_i à C_j, alors C_i est classé devant C_j dans le classement final.
On considère donc une situation T où la personne $m(C_1)$ préfère C_i à C_j.

On appelle T' la situation suivante : par rapport à la situation T, les $m(C_1)-1$ premières personnes se sont mises à préférer C_1 à tous les autres choix (sans changer leurs préférences entre les autres choix que C_1). La personne $m(C_1)$ place maintenant C_1 juste après C_i dans l'ordre de ses préférences. Les $m-m(C_1)$ dernières personnes classent C_1 en dernier dans l'ordre de leurs préférences.
a) Montrer que, dans le classement final de T', la position de C_i par rapport à C_j est la même que dans le classement final de T.
b) Montrer que, dans le classement final de T', C_1 arrive derrière C_i.
c) Montrer que, dans le classement final de T', C_1 arrive devant C_j.
d) En déduire que, dans le classement final de T, C_i arrive devant C_j.

8. Soit $k \neq 1$. On peut refaire les questions précédentes en remplaçant 1 par k. On définit ainsi un entier $m(C_k)$ et des configurations $S_{m'}^{(k)}$ pour m' allant de 0 à m.
Nous allons montrer que $m(C_k) = m(C_1)$.
a) Soit j différent de 1 ou de k. Quel est le classement final relatif de C_j et de C_k dans la configuration $S_{m(C_k)-1}^{(k)}$? Dans la configuration $S_{m(C_k)}^{(k)}$?
b) Montrer que $m(C_k) = m(C_1)$.

9. Montrer que la méthode de vote est une dictature.

10. Résumer les principales étapes de la preuve du théorème d'Arrow.

Partie III : théorème de Gibbard-Satterthwaite

On s'intéresse maintenant à des systèmes de vote qui permettent seulement de déterminer un choix gagnant et non tout un classement.
On dit qu'un système de vote est manipulable s'il existe une configuration S vérifiant la propriété suivante : dans la configuration S, c'est le choix C_i qui l'emporte. En mentant sur ses préférences, une personne qui préfère C_j à C_i peut faire gagner C_j plutôt que C_i.

1. On reprend le problème de la partie I, avec seulement cinq personnes. On utilise la méthode de vote 1, en précisant de plus que, si deux villes ont le même nombre de voix, c'est la première ville par ordre alphabétique qui l'emporte. Par exemple, si Ankara et Berlin sont à égalité, c'est Ankara qui l'emporte.
Dire quelle ville l'emporte dans chacune des deux configurations suivantes :

Configuration 1 :	Configuration 2 :
P_1 préfère Ankara puis Berlin puis Cherbourg	P_1 préfère Ankara puis Berlin puis Cherbourg
P_2 préfère Ankara puis Cherbourg puis Berlin	P_2 préfère Ankara puis Cherbourg puis Berlin
P_3 préfère Berlin puis Cherbourg puis Ankara	P_3 préfère Berlin puis Cherbourg puis Ankara
P_4 préfère Berlin puis Cherbourg puis Ankara	P_4 préfère Berlin puis Cherbourg puis Ankara
P_5 préfère Cherbourg puis Berlin puis Ankara	P_5 préfère Berlin puis Cherbourg puis Ankara

En déduire que la méthode 1 est manipulable.

Nous allons maintenant démontrer le théorème de Gibbard-Satterthwaite :

Théorème 3.1 *Si le nombre de choix possibles, n, est au moins 3, toute méthode de vote non-manipulable telle que chaque choix a une chance de l'emporter est une dictature.*

Dans la suite, on suppose donc fixée une méthode de vote non-manipulable telle que chaque choix a une chance de l'emporter. On appelle cette méthode $\mathcal{P}$.

2. Soit A un sous-ensemble des choix possibles. On appelle b le nombre d'éléments de A.
On considère une configuration S où les b premiers choix de chaque personne sont des éléments de A. On va montrer que le choix gagnant est un élément de A.
On raisonne par l'absurde et on suppose que le choix gagnant n'est pas dans A.
Puisque tous les choix ont une chance de gagner, il existe une configuration T dans laquelle c'est un élément de A qui gagne.
Pour tout m' allant de 0 à m, on appelle $S_{m'}$ la configuration dans laquelle les m' premières personnes ont les mêmes préférences que dans S et les $m - m'$ autres les mêmes préférences que dans T.
a) Dire pourquoi dans S_0, c'est un élément de A qui gagne et, dans S_m, ce n'est pas un élément de A qui gagne.
b) Soit M le plus petit entier tel que, avec la configuration S_M, ce n'est pas un élément de A qui gagne. Montrer que, dans la configuration S_M, la personne M peut, en mentant, faire gagner un choix qui l'arrange mieux. Conclure.

3. Nous allons maintenant, à partir de la méthode $\mathcal{P}$, définir une autre méthode, notée $\mathcal{R}$ qui, elle, permettra de déterminer un classement et non de sélectionner un unique choix.
Soit S une configuration. Soient C_i et C_j deux choix différents. On appelle $S_{i,j}$ la configuration suivante : pour tout $k \leq m$, la personne k a pour deux choix préférés C_i et C_j, classés l'un par rapport à l'autre dans le même ordre que dans la configuration S. Elle classe ensuite les autres choix par l'ordre de leurs numéros (C_1 puis C_2 puis C_3 ...).
a) Dire pourquoi, dans la configuration $S_{i,j}$, le choix gagnant pour la méthode $\mathcal{P}$ est nécessairement C_i ou C_j.
Si le choix gagnant est C_i, on décide que la méthode $\mathcal{R}$ classe C_i devant C_j. Sinon, elle classe C_j devant C_i.
b) Exemple : dans cette question, la méthode $\mathcal{P}$ est celle de la question 1. On considère la configuration 1. Déterminer, pour tous les couples de villes, quelle ville doit être classée devant l'autre pour $\mathcal{R}$. Vérifier qu'on obtient bien un classement cohérent. Lequel ?

4. Soit S une configuration. On note C_i le choix gagnant pour la méthode $\mathcal{P}$ dans cette configuration.
Nous allons montrer que, pour tout $j \neq i$, le choix gagnant pour la méthode $\mathcal{P}$ dans la configuration $S_{i,j}$ est toujours C_i.
On raisonne par l'absurde et on suppose que ce n'est pas le cas. Pour tout m' allant de 0 à m, on note $S_{m'}$ la configuration dans laquelle les m' premières personnes ont les mêmes préférences que dans $S_{i,j}$ et les $m - m'$ autres ont les mêmes préférences que dans S.
a) Dire pourquoi C_i gagne dans S_0 mais pas dans S_m.
b) Soit M le plus petit entier tel que C_i gagne dans S_{M-1} mais pas dans S_M. On note C_k le choix qui l'emporte dans S_M.
Premier cas : $k \neq j$. Montrer que, dans la configuration S_M, l'individu M, en mentant, peut faire gagner un choix qui l'arrange mieux.
c) Deuxième cas : $k = j$ et la personne M préfère i à j dans la configuration S. Montrer qu'il y a une absurdité.

d) Troisième cas : $k = j$ et la personne M préfère j à i dans la configuration S. Montrer que, dans la configuration S_{M-1}, l'individu M, en mentant, peut faire gagner un choix qui lui plaît davantage. Conclure.

5. Nous allons montrer ici que la méthode $\mathcal{R}$ définie dans la question 3. produit bien un classement correct.
Soit S une configuration. Il faut montrer que, si C_i, C_j, C_k sont trois choix différents, il n'est pas possible que $\mathcal{R}$ classe C_i devant C_j, C_j devant C_k et C_k devant C_i.
a) Soit $A = \{C_i, C_j, C_k\}$. On note T la configuration suivante : chaque personne k a pour trois choix préférés C_i, C_j, C_k, classés dans le même ordre que dans S. Elle classe les $m - 3$ autres choix par l'ordre de leurs numéros.
Pourquoi est-ce C_i, C_j ou C_k qui gagne dans la configuration T ?
On suppose par exemple que c'est C_i qui gagne dans la configuration T (on pourrait faire le même raisonnement si c'était C_j ou C_k).
b) Montrer que $T_{i,k} = S_{i,k}$.
c) Montrer que $\mathcal{R}$ ne classe pas C_k devant C_i.

6. Montrer que $\mathcal{R}$ est une méthode de vote unanime.

7. Montrer que $\mathcal{R}$ est indifférente aux options non-pertinentes.

8. a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une dictature.
b) * Montrer que $\mathcal{P}$ est aussi une dictature.

9. Résumer les principales étapes de la preuve du théorème de Gibbard-Satterthwaite

Partie IV : Raffinement [difficile]

Soit $\mathcal{M}$ une méthode de vote qui sélectionne un unique choix gagnant, avec $n \geq 3$ choix possibles, telle que tous les choix ont une chance de gagner.
On dit que $\mathcal{M}$ est à stratégie dominante si, pour toute personne P_k et tout ordre de préférences s pour cette personne, la condition suivante est vérifiée : il existe un ordre de préférences t (appelé « stratégie dominante ») tel que, quelles que soient les préférences des autres personnes que P_k, la personne P_k a intérêt à prétendre que son ordre de préférences est t (c'est-à-dire que si elle prétend autre chose, elle ne fera pas gagner un candidat qu'elle préfère).
Nous allons montrer que si $\mathcal{M}$ est à stratégie dominante, il existe une personne P_k possédant une stratégie qui gagne à tous les coups : pour tout ordre de préférences s_k de la personne P_k, il existe un ordre de préférences t_k tel que, si P_k prétend que t_k est son ordre de préférences, ce sera son choix préféré qui l'emportera.
[Ce résultat est celui que Gibbard a démontré en 1973, dont le théorème de Gibbard-Satterthwaite est un corollaire.]

1. Déduire le théorème de Gibbard-Satterthwaite de ce résultat.
Nous allons au contraire déduire ce résultat du théorème de Gibbard-Satterthwaite. Soit $\mathcal{M}$ une méthode de vote à stratégie dominante.
Pour toute personne P_k et tout ordre s_k pour la personne P_k, on note $\sigma_k(s_k)$ la stratégie dominante de P_k pour s_k.
Pour tout m' allant de 0 à m, on note $\mathcal{M}_{m'}$ la méthode de vote suivante : dans la configuration S, si $s_1, ..., s_m$ sont les préférences personnelles des m personnes, le choix sélectionné par la méthode

$\mathcal{M}_{m'}$ est le choix que renverrait la méthode $\mathcal{M}$ pour la configuration

$$\sigma_1(s_1), ..., \sigma_{m'}(s_{m'}), s_{m'+1}, ..., s_m.$$

2. Nous allons montrer par récurrence sur m' que $\mathcal{M}_{m'}$ est une méthode de vote pour laquelle tout choix a une chance de l'emporter.
a) Vérifier que c'est vrai pour $m' = 0$.
b) On le suppose vrai pour m' tel que $0 \leq m' \leq m-1$, et on souhaite le montrer pour $m'+1$. Soit C_i un choix quelconque. Soit $S = (s_1, ..., s_m)$ une configuration dans laquelle le choix vainqueur pour la méthode $\mathcal{M}_{m'}$ est C_i.
Notons $s'_{m'+1}$ une configuration dans laquelle le choix C_i arrive en tête. Montrer alors que dans la configuration

$$S' = (s_1, ..., s_{m'}, s'_{m'+1}, s_{m'+2}, ..., s_m),$$

c'est le choix C_i qui gagne pour la méthode $\mathcal{M}_{m'+1}$.
c) Conclure.

3. Montrer que la méthode de vote $\mathcal{M}_m$ n'est pas manipulable.

4. En déduire que la méthode de vote $\mathcal{M}_m$ est une dictature.

5. Soit P_k le dictateur pour cette méthode. Montrons que, pour toute configuration $S = (s_1, ..., s_m)$, si on remplace s_k par $\sigma_k(s_k)$, alors le choix renvoyé par $\mathcal{M}$ est le choix préféré de P_k pour l'ordre de préférences s_k.
a) Notons C_i ce choix préféré pour s_k. Supposons par l'absurde que, dans la configuration $S' = (s_1, ..., \sigma_k(s_k), s_{k+1}, ..., s_m)$, $\mathcal{M}$ renvoie C_j avec $j \neq i$.
Soit, pour tout $l \neq k$, t_l un ordre de préférences dans lequel C_j est le choix préféré. Montrer que dans la configuration

$$(\sigma_1(t_1), ..., \sigma_{k-1}(t_{k-1}), \sigma_k(s_k), ..., \sigma_m(t_m)),$$

$\mathcal{M}$ renvoie C_j.
b) Pourquoi est-ce absurde ?

6. En déduire que $\mathcal{M}$ est une dictature.