

Le Principe des Tiroirs

Martin Orr

Octobre 2012

Si on a $n + 1$ objets dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir qui contient au moins deux objets.

Si on a $kn + 1$ objets dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir qui contient au moins $k + 1$ objets.

1. Seize étudiants passent une épreuve avec trois exercices. Chaque étudiant résout un exercice. Démontrer qu'au moins 6 étudiants ont résolu la même exercice.
2. On choisit 11 nombres parmi $\{1, \dots, 20\}$. Montrer qu'on en trouve deux de somme 21.
3. Soient a, b, c des entiers. Montrer que $(a - b)(b - c)(c - a)$ est pair.
4. Il y a n mathématiciens dans une salle. Montrer qu'il y en a deux qui ont le même nombre d'amis dans la salle.
5. Montrer que dans tout ensemble de 12 entiers, il y en a deux dont la différence est divisible par 11.
6. On pose cinq points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il y a deux points qui sont à distance au plus $\sqrt{2}/2$.
7. On pose cinq points dans un triangle équilatère de côté 1. Montrer qu'il y a deux points qui sont à distance au plus $1/2$.
8. Neuf personnes s'asseyent dans une rangée de 12 chaises. Montrer qu'il y a trois chaises occupées consécutives.
9. Montrer qu'il y a un nombre $111\dots 1$ (c'est à dire que tous les chiffres décimaux sont 1) qui est divisible par 19.
10. Montrer que si on choisit $n + 1$ entiers parmi $\{1, \dots, 2n\}$ alors on en trouve deux qui sont premiers entre eux.
11. On pose sept points dans un cercle de rayon 1. Montrer qu'il y a deux points qui sont à distance au plus 1.
12. On pose 51 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il y a un cercle de rayon $1/7$ qui contient au moins trois points.
13. Six personnes sont dans une salle. Montrer qu'il y en a soit au moins trois qui se connaissent, soit au moins trois qui ne se connaissent pas.
14. Montrer que si on choisit $n + 1$ entiers parmi $\{1, \dots, 2n\}$ alors on en trouve deux dont le plus petit divise le plus grand.
15. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers. Montrer qu'il y a un sous-ensemble de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dont la somme des éléments est divisible par n .
16. Soit a un nombre réel positif. Montrer qu'il y a au moins un nombre dans $\{a, 2a, \dots, (n - 1)a\}$ qui est à distance au plus $1/n$ d'un nombre entier.