Permutations

Maxime Legrand

ENS - 17 mai 2014
http ://www.parimaths.fr

1 Définitions/Rappels sur les permutations

Définition 1. *Une* ***permutation*** *d'un ensemble fini E est une bijection de E dans E. En pratique, E sera presque toujours représenté par $[|1,n|]$, où n est son cardinal.*
On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[|1,n|]$.

Remarque. Sémantiquement, une permutation est un mélange d'un ensemble. On en trouve ainsi approximativement partout, et elles sont essentielles en théorie des nombres.

Définition 2. *Une* ***transposition*** *est une permutation consistant en l'échange d'exactement deux éléments de E.*

Remarque. Vous avez vu avec Amine que $\mathfrak{S}_n$ est **engendré** par les transpositions, c'est à dire que toute permutation σ s'écrit comme un produit de transpositions : $\sigma = \tau_1\tau_2...\tau_k$.
$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ est appelée la **signature** de σ.
Une transposition τ est généralement représentée par le couple (i,j) où $i \neq j$ et $\tau(i) = j$.

Exercice d'application. Autour des transpositions...
- Montrer que la signature d'une permation σ est unique.
- Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $\{(i,i+1) \mid i = 1..n-1\}$.

Définition 3. *On appelle support de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ l'ensemble des éléments de E qui sont modifiés par σ.*

2 Décomposition en cycles

Définition 4. *Une permutation σ est appelée* ***cycle*** *- ou plus précisément k-cycle - s'il existe $e_1, ..., e_k \in E$ distincts tels que $\sigma(e_i) = e_{i+1}$, $\sigma(e_k) = e_1$ et $\forall x \in E\backslash\{e_1, ...e_k\}$, $\sigma(x) = x$.*

Remarque. Moralement, un cycle est ce que l'on se représente quand on pense à un cycle : $e_1 \to e_2 \to ... \to e_k \to e_1$.
Un cycle tel que défini ci-dessus est représenté par le n-uplet $(e_1, ...e_k)$.

Exercice d'application. Autour des cycles...
- Quelle est la signature d'un k-cycle ?
- Montrer toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme le produit d'au plus $n/2$ cycles. (*Indice* : "Supports disjoints")

Définition 5. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. L'exercice précédent nous permet de définir la* ***décomposition en produit de cycles à supports disjoints*** *de σ.*

Exercice d'application. Autour des cycles à supports disjoints...
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, m le cardinal de son support et p le nombre de cycles dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
Montrer que $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{m+p}$.

Exercice d'application. Ordre d'une permutation...
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^r = Id_E$. (Pour ceux qui veulent le montrer de façon intéressante, commencez par montrer que $\mathfrak{S}_n$ a une structure de groupe)
Le plus petit de ces r est appelé **ordre** de σ. Exprimez efficacement l'ordre de *sigma* grâce à ce que l'on a vu précédemment.

3 Exercices

Exercice 1. *Le retour des chaussettes tueuses*
Soit σ une permutation de $E = [|1, n^2+1|]$. Montrer qu'il existe une suite croissante de $n+1$ termes une suite décroissante de $n+1$ termes dans $\sigma(E)$.

Exercice 2. *De drôles de permutations...*
Trouver le nombre de permutations $(a_1, ..., a_n)$ de $[|1, n|]$ vérifiant : $\forall k \in [|1, n|],\ k | 2(a_1 + ... + a_k)$.