Introduction aux inégalités

-cours-

Razvan Barbulescu

ENS, 8 février 2014

1 Inégalité des moyennes

Faisons d'abord la liste des propritétés simples des inégalités:

- $a \geq a'$ et $b \geq b' \Rightarrow a + b \geq a' + b'$;
- $s \geq 0$ et $a \geq a' \Rightarrow sa \geq sa'$;
- $a \geq a' > 0 \Rightarrow \frac{1}{a'} \leq \frac{1}{a}$.

Définition 1. *Soit $a_1, \ldots, a_n$ des variables. Si $E(a_1, \ldots, a_n)$ est une expression, la somme symétrique, notée $\sum_{cyc} E(a_1, \ldots, a_n)$ est la somme de tous le termes obtenus en échangeant $a_1 \to a_2$, $a_2 \to a_3$, $\cdots$, $a_{n-1} \to a_n$ et $a_n \to a_1$.*

Par exemple $\sum_{\mathrm{cyc}} a^2$ désigne $a^2 + b^2 + c^2$ et $\sum_{\mathrm{cyc}} a^3(b^2 + c)$ désigne $a^3(b^2 + c) + b^3(c^2 + a) + c^3(a^2 + b)$.

Exercice 1. *Montrer que, indépendamment du nombre de signes $\sqrt{}$, on a*

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}} < 3.$$

Exercice 2. *Montrer que $\sum_{n=1}^{2014} \frac{1}{n^2} < 2$.*

Remarque 1. *Si on continue à sommer des termes $\frac{1}{n^2}$ on constate qu'on se raproche du nombre $\frac{\pi^2}{6}$.*

Théorème 1 (Inégalité des moyennes)**.** *Soient x et y deux réels positifs. Montrer que:*

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

On résume ainsi: moyenne quadratique $\geq$ moyenne arithmétique $\geq$ moyenne géométrique $\geq$ moyenne harmonique.

Remarque 2.
- *Si un train se déplace la moitié du trajet à $320km/h$ et l'autre moitié à $80km/h$, la vitesse moyenne est la moyenne harmonique.*

- *La température absolue d'un gaz est la moyenne quadratique des vitesses des molécules qui le composent.*

Proof. L'inégalité arithmético géométrique est équivalente à $(x+y)^2 \geq 4xy$, ou de manière équivalente $(x-y)^2 \geq 0$. Toutes les autres inégalités du théorème en découle facilement. □

Exercice 3. *Montrer l'inégalité des moyennes arithétique et géométrique pour quatre, puis trois, nombres.*

Proof. On écrite $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$.

Pour passer à trois nombres, on pose $d = \frac{a+b+c}{3}$. Ainsi $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{a+b+c}{3}$. Par ce qu'on vient de prouver, on sait que $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$. En élevant à la puissance 4-ème on trouve $(\frac{a+b+c}{3})^4 \geq xyz\frac{a+b+c}{3}$ et finalement

$$\frac{a+b+c}{3} \geq 3\sqrt[4]{xyz}.$$

□

Exercice 4 (Inégalité de Nesbitt)**.** *Soient $a, b, c > 0$. Montrer que:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Proof. On rajoute 3 et l'inégalité devient

$$(a+b+c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) \geq \frac{9}{2}.$$

Or, cela est l'inégalité des moyennes arithmétique et harmonique pour $x = b+c$, $y = c+a$ et $z = a+b$. □

2 Convexité

Définition 2. *Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si, pour tous $x, y \in I$, on a*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Une fonction g est concave si $-g$ est convexe.

Exercice 5. *Montrer que les fonctions $f, g :]0,\infty[\to]0,\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sont convexes.*

Remarque 3. *En utilisant les dérivées secondes on peut faire un calcul pour décider si une fonction est convexe.*

Théorème 2 (Propriété des fonctions convexes, Jensen)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue convexe. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1^n} a_i = 1$. Alors, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$, on a*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Exercice 6. *On admet que, pour tout réel non-nul α, l'application $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ est convexe. Montrer que:*

$$m_2 \geq m_1 \geq m_{-1},$$

où $m_2 = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$, $m_1 = \frac{x+y+z}{3}$ et $m_{-1} = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$.

Proof. On applique l'inégalité de Jensen à la fonction $x \mapsto x^2$, pour les coefficients $a_1 =$ □

3 Inégalité géométriques

[1] La plupart des inégalités triangulaires se résolvent par une des techniques suivantes:

- on se ramène à l'inégalité triangulaire;
- on traduit le problème dans une inégalité algébrique;
- on utilise des formules géométriques.

En guise d'explication, faisons trois exercices.

Exercice 7 (Application de l'inégalité triangulaire)**.** *Montrer que dans un triangle ACB, de médienne AM, on a:*

$$AM \leq \frac{AB + AC}{2}.$$

Proof. On considère le symétrique A' de A par rapport à M. Dans le triangle ACA' on a $AA' \leq AC + CA'$. Comme les triangles BMA et CAA' sont égaux, on a $CA' = AB$. En utilisant que $AA' = 2AM$, on obtient l'inégalité. □

Exercice 8 (Application de la traduction en langage algébrique)**.** *Dans le triangle ABC on a $AB < AC$. Montrer que, pour tout $D \in [BC]$ on a $AD \leq AC$.*

Proof. On note H le pied de l'hauter issue de A et $h = AH$. Comme $AB^2 = h^2 + BH^2$ et $AC^2 = h^2 + CH^2$, on déduit que $BH < CH$. Alors, poiyr tout $D \in [BC]$ on a $DH < CH$. Donc $AD^2 = h^2 + DH^2 < CH^2$. □

[1] Exercices de www.MateInfo.ro

Exercice 9 (Application des formules géométriques)**.** *Si x, y, z sont les longueurs des côtés d'un triangle, montrer que:*

$$2(xy + yz + zx) \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Proof. On rappelle la formule d'Héron: pour a, b, c les côté du triangle ABC on a

$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

où $s = \frac{a+b+c}{2}$. Cela implique

$$\begin{aligned}
16A^2_{\triangle ABC} =&(a+b+C)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\\
=&[((a+b)+c)((a+b)-c)][(c+(a-b))(c-(a-b))]\\
=&[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]\\
=&[2ab+(a^2+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)]\\
=&4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\\
=&2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-(a^4+b^4+c^4).
\end{aligned}$$

On conclue que $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (a^4 + b^4 + c^4)$.

C'est inégalité recherchée, mais avec a, b, c à la place de $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un triangle de côtés $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ et $c = \sqrt{z}$. On a $a \leq b+c$ si et seulement si $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}+\sqrt{z}$, ce qui équivaut à $x \leq y+z+2\sqrt{yz}$. Or, cette dernière inégalité est vraie car x, y, z sont les côtés d'un triangle.

□

Exercices – inégalités

Razvan Barbulescu

ENS, 8 février 2014

Exercice 1. *Soient a, b, c trois réels positifs. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.*

Démonstration. Par l'inégalité arithmético-géométrique, appliquée à a^2 et b^2 : $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$. De manière équivalente

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \tag{1}$$

De la même manière on obtient :

$$b^2 + c^2 \geq 2bc, \tag{2}$$
$$c^2 + a^2 \geq 2ac. \tag{3}$$

Quand on somme les trois équations, on obtient $2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca$. En divisant par 2, on trouve l'inégalité demandée. □

Exercice 2. *Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$. En déduire une preuve de l'inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres.*

Démonstration. L'identité se montre par calcul direct. Soient x, y, z toris nombres positifs. On applique l'identité pour $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ et $c = \sqrt[3]{z}$. Alors $x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$. D'après l'Exercice 1, cette deuxième parenthèse est positive. Ainsi $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$. □

Exercice 3. *Pour $a, b, c > 0$, montrer que $(a+b+c)^3 \geq \frac{27}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$.*

Démonstration. On applique l'inégalité arithmético-géométrique aux nombres $x = a + b$, $y = b + c$ et $z = a + c$. □

Exercice 4. *Si $a, b, c > 0$ sont les côtés d'un triangle, montrer que*

$$(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \leq abc.$$

Démonstration. Comme a, b, c sont les côtés d'un triangle, on peut poser $x = b + c - a > 0$, $y = a + c - b > 0$ et $z = a + b - c > 0$. Alors l'inégalité devient $8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x)$ qui s'obtient par l'inégalité arithmético-géométrique. □

Exercice 5. *Pour $a, b, c > 0$, montrer que*

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Démonstration. On écrit l'inégalité sous la forme

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{b(a+b)}\right) (\sum_{\text{cyc}} a) \left(\sum_{\text{cyc}} (a+b)\right) \geq 27$$

et on applique l'inégalité arithmético-géométrique. □

Exercice 6. *Soient $a, b, c, d > 0$ tels que $a+b+c=1$. Alors on a*

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} \leq 2\sqrt{3}.$$

Démonstration. Montrons que la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x}$ est concave. Pour tout a et b de $]0,1[$ on doit vérifier que $\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} \leq 2\sqrt{1 - \frac{a+b}{2}}$. Cela est équivalent à $2\sqrt{1-a}\sqrt{1-b} \leq (1-a)+(1-b)$. Or, cela est vrai par l'inégalité arithmético-géométrique, appliquée à $x = 1-a$ et $y = 1-b$.

Comme f est concave, on peut appliquer l'inégalité de Jensen. On prend $x_1 = 1-a$, $x_2 = 1-b$, $x_3 = 1-c$ et les coefficients $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$ et $a_3 = \frac{1}{3}$, et on a $\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$. De manière équivalente, on a

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} \leq 3\sqrt{1 - \frac{a+b+c}{3}} = 2\sqrt{3}.$$

□

Exercice 7. *Soient a, b, c trois nombres tels que $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$. Montrer que*

$$(a-b)(a^2-9) + (a-c)(b^2-9) + (b-c)(c^2-9) \leq 36.$$

Démonstration. On note $f(a,b,c)$ le membre gauche de l'inégalité. On remarque que, si $a > 0$ et ϵ est un nombre tel que $0 < \epsilon < a$, alors $f(a,b,c) \leq f(a-\epsilon, b-\epsilon, c-\epsilon)$. Ainsi on peut supposer que a est nul. On a $f(0,b,c) = 9b + 9c - cb^2 + 9b - c^2b - c^3 + 9c$. En faisant les calculs, on trouve que le membre gauche vaut $c(18 - b^2 - c^2 + bc) = c[18 - (b - \frac{c}{2})^2 - \frac{3}{4}c^2] \leq \frac{1}{4}c(24 - c^2)$. Il reste à montrer $c^3 + 48 \geq 24c$. On applique l'inégalité arithmético-géométrique à $x = c^3$, $y = 24$ et $z = 24$ et on trouve $48 + c^3 \geq 12\sqrt[3]{9}c > 12\sqrt[3]{8}c = 24c$. □

Exercice 8. *Pour $a, b, c \in [0,1]$, montrer que $a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \leq 1$.*

Démonstration. On a $a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a) \leq a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)$ $= a+b+c-(ab+bc+ca) = 1-(1-a)(1-b)(a-c) - abc \leq 1$. □

Exercice 9. *Soient $a, b, c > 0$ tels que $ab+bc+ca = 3$. Monter que*

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq a + b + c + 1.$$

Démonstration. L'inégalité est équivalente à

$$a^2+b^2+c^2+abc-(a+b+c)-1-(ab+bc+ca-3)\geq 0.$$

On pose $x=(b-1)(c-1)$, $y=(a-1)(c-1)$ et $z=(b-1)(a-1)$. Comme $xyz=[(a-1)(b-1)(c-1)]^2\geq 0$, au moins un des nombres x, y et z est non-négatif. Par symétrie, on peut supposer que x est non-négatif. Le membre gauche de l'inégalité à prouver s'écrit comme $(a+1)(b-1)(c-1)+(a-1)^2+(b-c)^2=$ $x(a+1)+(a-1)^2+(b-c)^2\geq 0$. □

Exercice 10 (Inégalité de Cauchy)**.** *Si $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$, alors*

$$(ax+by+cz)^2\leq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

On a égalité si et seulement s'il existe un nombre $k\in\mathbb{R}$ tel que $a=kx$, $b=ky$ et $c=kz$ (les deux triplets sont proportionnels).

Remarque 1. *Dans les livres anglais, cette inégalité est parfois notée CBS comme abréviation pour Cauchy-Bounyakowski-Schwarz.*

Démonstration. En développant, l'inégalité est équivalente à

$$2abxy+2acxz+2bcyz\leq(a^2y^2+b^2x^2)+(a^2z^2+c^2x^2)+(b^2z^2+c^2y^2).$$

Or, on montre cela en appliquant l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique aux couples (a^2y^2,b^2x^2), (a^2z^2,c^2x^2) et (b^2z^2,c^2y^2). □

Exercice 11 (Inégalité de Minkowski)**.** *Si $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$, alors on a*

$$\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

On a égalité si et seulement si il existe un nombre $k\in\mathbb{R}$ tel que $a=kx$, $b=ky$ et $c=kz$ (les deux triplets sont proportionnels).

Démonstration. En élevant au carré et en développant on obtient que l'inégalité est équivalente à l'inégalité de Cauchy. □

Exercice 12. *Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $a^2+b^2\geq c^2$, $a^2+c^2\geq b^2$ et $b^2+c^2\geq a^2$. Montrer que*

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)\geq 4(a^6+b^6+c^6).$$

Démonstration. Par l'inégalité de Cauchy, $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\geq(a^2+b^2+c^2)^2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a=\max\{a,b,c\}$. Alors $a\geq b$, $a\geq c$ et $b^2+c^2\geq a^2$. Ainsi $(a^2+b^2+c^2)^2\geq 4a^4$. Donc le membre gauche est plus grand ou égal à $4a^4(a^2+b^2+c^2)\geq 4(a^6+a^4b^2+a^4c^2)\geq 4(a^6+b^6+c^6)$. □

Exercice 13. *Soit un triangle ABC rectangle en A. Soient $M\in[AB]$ et $N\in[AC]$. Montrer que :*

$$MN\cdot BC\geq AM\cdot AC+AN\cdot AB,$$

où MN désigne la longueur du segment $[MN]$.

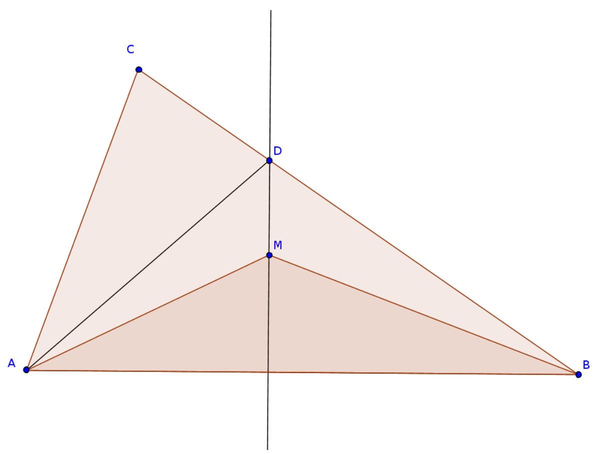
Démonstration. On note $b = AB$, $c = AC$, $x = AM$ et $y = AN$. Alors l'inégalité devient $\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2} \geq (by+cx)$, ce qui est vrai par l'inégalité de Cauchy. $\square$

Exercice 14. *Si M est un point intérieur au triangle ABC, montrer que $AM + BM + CM$ est compris entre le demi-périmètre et le périmètre.*

Démonstration. Dans le triangle ABM, l'inégalité triangulaire donne $AM + BM \geq AB$. De même, on trouve $AM + CM \geq AC$ et $BM + CM \geq BC$. En sommant, on a $2(AM+BM+CM) \geq AB+BC+CA$, donc $AM+BM+CM \geq \frac{AB+BC+CA}{2}$.

Pour la deuxième partie de la preuve, on va montrer un lemme.

Lemme 1. *Soit ABC un triangle qualconque et M un point intérieur. Alors $AM + MB \leq AC + CB$.*



preuve du lemme. Dans la figure ci-dessus on note D le point d'intersection entre la droite BC et la perpendiculaire de M sur AB. Par le théorème de Pythagore, on montre que $AD > AM$ et $BD > BM$, donc $AD + DB > AM + MB$. Ensuite, par l'inégalité triangulaire au triangle ACD, on a $AC+CD > AD$. En ajoutant DB, on a $AC+CD+DB > AD+BD$, soit $AC+CB > AD+DB$. D'où, $AC + CB > AM + MB$. $\square$

Revenant à la solution de l'exercice, on applique le lemme pour le triangle ABC avec les couples (A, B), (A, C) et (B, C) jouant le rôle de (A, B) dans le lemme :

$$AC + CB \geq AM + MB,$$
$$AB + BC \geq AM + MC,$$
$$BA + AC \geq BM + MC.$$

En sommant, on trouve $2(AB + BC + CA) \geq 2(MA + MB + MC)$, ce qui finit l'exercice. $\square$