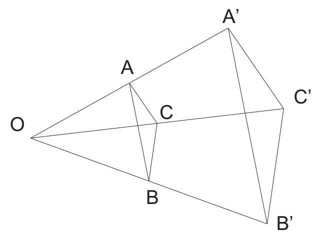
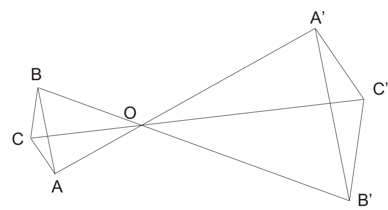
Géometrie (homothéties)

Préréquis: triangles semblables; médiane, bissectrice, médiatrice, hauteur d'un triangle; cercle inscrit, cercle circonscrit; tangente à un cercle.

L'homothétie de centre O et de rapport k non nul est l'application qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ [1]. Deux figures F et F' sont appelées *homothétiques*, s'il existe une homothétie qui transforme F en F'.



Homothétie de centre O et de rapport 2



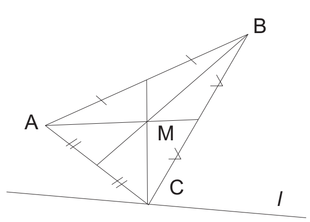
Homothétie de centre O et de rapport -2

Propriétés:

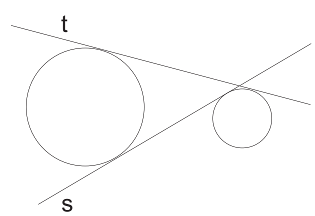
- toute homothétie transforme une droite en une droite qui lui est parallèle;
- toute homothétie préserve les angles;
- toute homothétie préserve les proportions;
- toute homothétie préserve le parallélisme : deux droites parallèles sont envoyées sur deux droites parallèles;
- toute homothétie transforme un cercle en un cercle.

Exercice 1. Démontrer les propriétés ci-dessus.

Exercice 2. Quelle est la trajectoire du point d'intersection des médianes M d'un triangle ABC si ces deux sommets A et B sont fixés et le troisième sommet C se déplace le long d'une droite l donnée?



Ex.2: Quelle est la "trajectoire" du point M?



Ex.7: t est la tangente extérieure, s est la tangente intérieure des deux cercles donnés

[1] voir une équivalente définition de l'homothétie qui n'utilise pas la notion du vecteur à la fin de la feuille

Exercice 3. Prouver que dans chaque trapèze les milieux des bases (des côtés parallèles), le point d'intersection des diagonales et le point d'intersection des côtés non parallèles sont situés sur la même droite.

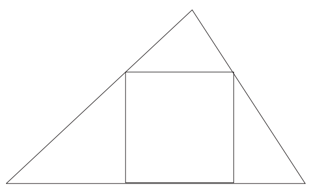
Exercice 4. Trouver le lieu géometrique des milieux des segments dont l'une des extrémités est un point donné et l'autre est située sur un cercle donné.

Exercice 5. Etant donnés deux cercles de rayons R et r, trouver le lieu géometrique des milieux des segments dont l'une des extrémités est située sur le premier cercle et l'autre est située sur le deuxième cercle.

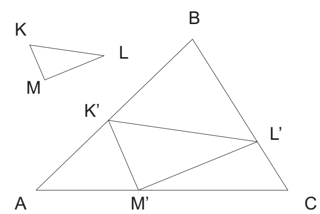
Remarque: les homothéties sont particulèrement utiles pour résoudre des problèmes sur des cercles car deux cercles sont toujours homothétiques.

Exercice 6. Construire le centre d'homothétie de deux cercles donnés.

Exercice 7. Constuire une tangente commune extérieure et une tangente commune intérieure à deux cercles donnés (la tangente est dite intérieure si les deux cercles se trouvent des deux côtés de cette tangente et extérieure s'ils se trouvent du même côté).



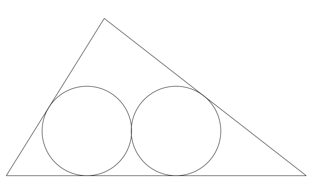
Ex.8: carré inscrit dans un triangle



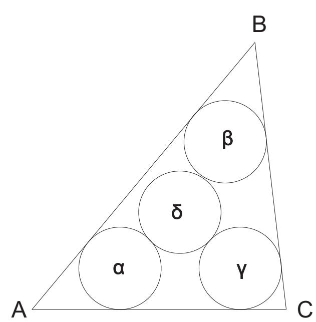
Ex.9: les côtés de $K'L'M'$ sont parallèles aux côtés de KLM

Exercice 8. Inscrire un carré dans un triangle (deux cotés du triangle contiendront chacun un sommet du carré et le troisème côté du triangle contienra deux autres sommets du carré).

Exercice 9. Etant donnés deux triangles ABC et KLM, inscrire un triangle $K'L'M'$ dans le triangle ABC de telle façon que les cotés de $K'L'M'$ soient parallèles aux cotés de KLM.



Ex.10: deux cercles tangents inscrits dans un triangle



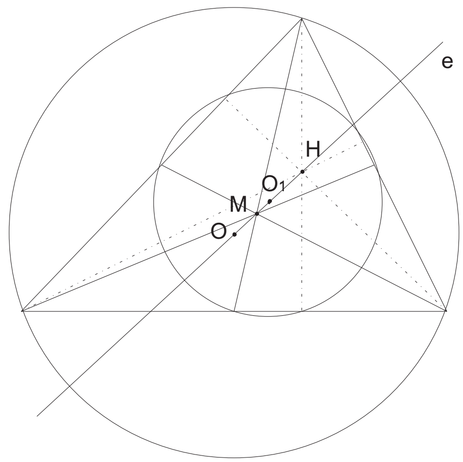
Ex.15: quatre cercles tangents dans un triangle

Exercice 10. Inscrire deux cercles egaux tangents dans un triangle (chaque cercle sera tangent à deux côtés du triangle et à l'autre cercle).

Le cercle d'Euler d'un triangle est le cercle passant par les milieux des trois côtés du triangle. Il est également appelé *le cercle des neufs points* car il passe par les neuf points remarquables du triangle: les trois milieux des trois côtés du triangle, le pied de chacune des trois hauteurs du triangle, le milieu de chacun des trois segments reliant l'orthocentre à un sommet du triangle.

Exercice 11 (droite d'Euler)**.** Démontrer que dans un triangle l'orthocentre H, le point d'intersection des médianes M, le centre du cercle circonsrit O et le cenre du cercle d'Euler O_1 se trouvent sur la même droite (appelée la droite d'Euler) et, de plus, $HO_1 : O_1M : MO = 3 : 1 : 2$.

Indice: considérer l'image du triangle donné par la homothétie de centre M et de rapport $-1/2$.



Ex.11: e est la droite d'Euler; le cercle intérieur (au centre O_1) est le cercle d'Euler

Exercice 12. Démontrer que pour chaque triangle $R \geq 2r$, oú R est le rayon du cercle circonscrit et r est le rayon du cercle inscrit.

Exercice 13. Etant donnés deux rayons d'un même cercle, construire une corde qui est divisée par ces deux rayons en trois parties égales.

Exercice 14. Dans un triangle ABC se trouvent quatre cercles égaux α, β, γ et δ. Les cercles α, β et γ sont chacun tangents à deux côtés du triangle ABC et au cercle δ. Démontrer que le centre du cercle δ, le centre du cercle circonsrit au triangle ABC et le centre du cercle inscrit au triangle ABC sont alignés.

Exercice 15. Trouver le lieu géometique des orthocentres des triangles inscrits dans un cercle donné.

Indice: trouver d'abord le lieu géometrique des centres de gravité de ces triangles (le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ces médianes).

Remarque sur les exercices de construction (exercices 6-10 et 13): il s'agit de la construction à la regle (non graduée) et au compas. Les deux opérations de base autorisées sont:

- tracer une droite passant par deux points donnés;

- tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné.

En particuler la règle et le compas permettent de

- construire le milieu et la médiatrice d'un segment donné;
- construire la bissectrice d'un angle donné;
- construire la parallèle à une droite donnée passant par un point donné;
- construire la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné;

Ainsi les opérations ci-dessus sont autorisées dans les exercices 6-10, 13.

Une définition de *l'homothétie* qui n'utilise pas la notion de vecteurs: l'homothétie de centre O et de rapport k non nul est l'application qui à tout point M associe le point M' sur la droite (OM) tel que: si $k > 0$, alors M et M' se trouvent du même côté du point O et $|OM'| = k|OM|$; si $k < 0$, alors M et M' se trouvent des deux côtés du point O et $|OM'| = -k|OM|$ (ici $|OM|$ signifie la longueur du segment OM).