Théorie des graphes

16 novembre 2013

Pour un cours plus complet sur les graphes, nous renvoyons vers le polycopié de P. Bornsztein disponible à l'adresse

`http://www.animath.fr/IMG/pdf/cours-graphes.pdf`

1 Notion de graphe

1.1 Premières définitions

Un *graphe* c'est
- des *sommets* ;
- des *arêtes* reliant des sommets.

Nous allons travailler avec des graphes *simples*, c'est-à-dire tels que deux sommets ne sont jamais reliés par plus d'une arête, et *finis*, c'est-à-dire ayant un nombre fini de sommets et d'arêtes. De plus, nos graphes n'auront pas de boucles, c'est-à-dire qu'un sommet n'est jamais relié à lui-même. Un *chemin* entre deux sommets A et B est une suite d'arêtes reliant A et B. Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques peuvent toujours être reliés par un chemin. Un chemin qui parcourt au moins trois arêtes distinctes et qui revient sur lui-même s'appelle un *cycle*. Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.

Exercice 1

1. Pour tout sommet M d'un graphe G, on note $d(M)$ son degré. Montrer que, si on note a le nombre d'arêtes de G,
$$2a = \sum_{M \in G} d(M).$$
Ceci s'appelle le « lemme des poignées de mains ».
2. Lors d'un colloque de mathématiques, chaque chercheur a échangé une poignée de mains avec un certain nombre d'autres chercheurs.
Montrer que le nombre de chercheurs ayant serré un nombre impair de mains est pair. Montrer qu'il existe deux chercheurs qui ont serré le même nombre de mains.

1.2 Graphes complets, graphes bipartites

Pour tout $n \geq 1$, on note K_n le graphe *complet* à n sommets, c'est-à-dire le graphe à n sommets tel que chacun de ses sommets est relié à tous les autres.

On appelle graphe bipartite un graphe tel qu'on peut séparer l'ensemble de ses sommets en deux groupes A et B de telle sorte que deux sommets appartenant à un même groupe ne

soient jamais reliés (on dit que A et B sont des ensembles de sommets indépendants). Si tous les sommets de A sont reliés à tous les sommets de B, on dit que le graphe bipartite est complet, et on le note $K_{m,n}$ où m est le cardinal de A et n le cardinal de B.
Exercice 2 Dessiner $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5,\ K_{3,3}$.

1.3 Arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.
Exercice 3

1. Montrer que dans un arbre, il existe un seul chemin entre deux sommets donnés.
2. Montrer qu'un arbre possède nécessairement au moins un sommet de degré un.
3. Montrer par récurrence qu'un arbre à n sommets a nécessairement $n-1$ arêtes.

Exercice 4 Montrer que chaque graphe connexe G a un arbre couvrant, c'est-à-dire qu'il existe un arbre ayant pour sommets ceux de G et ayant ses arêtes parmi celles de G. Autrement dit, tout graphe G s'obtient à partir d'un arbre en ajoutant des arêtes. Indication : raisonner par récurrence sur le nombre n des cycles de G.

Exercice 5

1. Montrer qu'un arbre est bipartite.
2. Montrer plus généralement qu'un graphe est bipartite si et seulement si tous ses cycles sont de longueur paire.

2 Graphes planaires

On dit qu'un graphe est *planaire* si on peut le dessiner sans que ses arêtes se croisent (ailleurs qu'en les sommets, bien évidemment). Une telle manière de le dessiner s'appelle une *représentation planaire*. Attention : ce n'est pas parce qu'une des représentations du graphe n'est pas planaire qu'il est impossible de le dessiner de manière planaire. Les arêtes d'un graphe planaire délimitent des régions du plan que nous appellerons *faces*. Le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe planaire sont reliés par la formule d'Euler.

Théorème 1. (Formule d'Euler, 1758) Soit G un graphe qui est simple, planaire et connexe. Supposons qu'une représentation planaire de G possède s sommets, a arêtes et f faces. Alors

$$s - a + f = 2.$$

Remarque 2. Attention, si le graphe est fini, l'une des faces du graphe est infinie !

Exercice 6

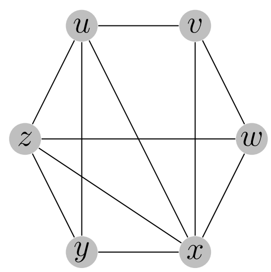
1. Montrer la formule d'Euler en fixant le nombre de sommets s du graphe, et en raisonnant par récurrence sur le nombre d'arêtes.
2. En déduire la formule d'Euler dans le cadre plus général d'un graphe non nécessairement connexe, mais contenant c composantes connexes :

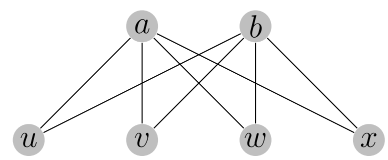
$$s - a + f = 1 + c.$$

La formule d'Euler peut être utilisée pour montrer le fait intuitif qu'un graphe planaire ne peut pas avoir beaucoup plus d'arêtes que de sommets :

Exercice 7

1. Soit G un graphe planaire connexe à s sommets et a arêtes. Montrer que $a \leq 3s - 6$.
2. Montrer que si on suppose de plus que G est sans triangle, c'est-à-dire que chaque face est délimitée par au moins 4 arêtes, alors $a \leq 2s - 4$.
3. Parmi les graphes $K_4, K_5, K_{3,3}$ et





lesquels sont planaires ?

3 Coloriages

Un *coloriage* du graphe G est une manière d'attribuer une couleur à chacun de ses sommets. On dit qu'un coloriage est *propre* si deux sommets reliés par une arête ont des couleurs différentes. Le graphe G étant fini, on peut définir le *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe fini G comme le plus petit nombre n tel que G puisse être colorié avec n couleurs.

Exercice 8

1. A quoi ressemble un graphe de nombre chromatique 1 ?
2. Quel est le nombre chromatique d'un arbre ? D'un graphe bipartite ?
3. Quel est le nombre chromatique d'un graphe complet ?

Exercice 9

1. Soit G un graphe planaire. Montrer que G possède au moins un sommet de degré ne dépassant pas 5. Indication : le fait que G soit planaire est très important.
2. Montrer le théorème des 6 couleurs : tout graphe planaire G a un nombre chromatique inférieur ou égal à 6. Indication : raisonner par récurrence sur le nombre de sommets de G.
3. Nous allons montrer un raffinement du résultat précédent : tout graphe planaire G a en fait un nombre chromatique inférieur ou égal à 5. On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets $n \geq 5$, le résultat étant clair pour $n = 5$. On suppose que le résultat est établi pour les graphes à n sommets.
   (a) Soit G un graphe planaire à $n+1$ sommets, et soit v un sommet de degré 5, et $v_1, \ldots v_5$ ses voisins. On colorie le graphe G' obtenu en supprimant v et les arêtes qui en sortent. Pourquoi peut-on supposer que $v_1, \ldots v_5$ sont tous de couleurs différentes ? On note $c_1, \ldots c_5$ leurs couleurs respectives.

(b) On considère le sous-graphe $G_{1,3}$ de tous les sommets coloriés avec les couleurs c_1 et c_3, ainsi que les arêtes les reliant dans G. Conclure dans le cas où v_1 et v_3 sont dans des composantes connexes différentes de $G_{1,3}$.

(c) On suppose donc que v_1 et v_3 sont dans la même composante connexe de $G_{1,3}$. On considère de même le sous-graphe $G_{2,4}$ des sommets de couleurs c_2 et c_4. Expliquer pourquoi v_2 et v_4 appartiennent nécessairement à deux composantes connexes distinctes de $G_{2,4}$. Conclure.

Remarque 3. En fait, il suffit même d'avoir quatre couleurs pour colorier proprement un graphe (c'est le fameux « théorème des quatre couleurs »), mais la preuve est beaucoup plus compliquée.

Dans certains contextes, il peut être judicieux de considérer des graphes dont ce sont les arêtes qui sont coloriées par différentes couleurs.

Exercice 10

- Prouver que parmi tout ensemble constitué de 6 personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas deux à deux.
- Dans un groupe de 17 personnes, deux quelconques sont toujours amies, ou ennemies, ou indifférentes l'une à l'autre (chacun de ces sentiments étant partagé par les deux personnes en question). Prouver qu'il existe un groupe de trois personnes qui ont deux à deux les mêmes sentiments les unes envers les autres.

4 Sous-graphes complets dans un graphe

Nous allons appeler *triangle* dans un graphe G tout ensemble de 3 sommets de G reliés deux à deux par des arêtes. Il est naturel de penser qu'à un nombre de sommets fixé, un graphe qui a beaucoup d'arêtes contient forcément un triangle. C'est ce que nous allons formaliser dans l'exercice suivant :

Exercice 11 (Théorème de Mantel-Turán) Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Mantel (1907) : un graphe G à n sommets ne contenant aucun triangle a au plus $\frac{n^2}{4}$ arêtes, l'égalité étant atteinte quand n est pair et $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

1. Soit I un ensemble de sommets indépendants (c'est-à-dire tel que deux d'entre eux ne soient jamais reliés par une arête) de taille maximale, et soit x cette taille. Montrer que le degré de tout sommet de G est inférieur ou égal à x.
2. Soit J l'ensemble des sommets de G qui ne sont pas dans I. Montrer que le nombre a des arêtes de G vérifie
$$a \leq \sum_{A \in J} d(A).$$
3. Justifier que pour tous réels x, y on a $4xy \leq (x+y)^2$.
4. En déduire le résultat souhaité, avec le cas d'égalité.

Remarque : le nom du mathématicien hongrois Turán est souvent associé au théorème de Mantel, car il a généralisé ce théorème en 1941 en montrant qu'un graphe à n sommets ne contenant pas de r-clique, c'est-à-dire de sous-graphe complet à r sommets, a au plus $\frac{r-2}{r-1} \times \frac{n^2}{2}$ arêtes. Le théorème de Mantel correspond alors au cas $r = 3$.

Exercice 12 On considère 21 points disposés sur un cercle. Montrer que parmi toutes les cordes reliant deux quelconques de ces points, il y en a 100 qui relient des couples de points définissant un angle au centre inférieur ou égal à 120°.

Exercice 13 Soient n points dans le plan. Montrer que le nombre de paires de points distants de 1 parmi ceux-ci ne dépasse pas $\frac{n^2}{3}$.

Exercice 14 (IMO Shortlist 2001) On appelle k-clique un ensemble de k personnes qui se connaissent deux à deux. A une fête, on observe que chaque couple de 3-cliques a au moins une personne en commun, et qu'il n'y a pas de 5-clique. On va montrer qu'il suffit que deux personnes partent pour qu'il n'y ait plus aucune 3-clique. On raisonne par l'absurde.

1. Montrer qu'alors n'y a pas de 4-clique.
2. En déduire que deux 3-cliques distinctes ne peuvent pas avoir plus d'une personne en commun.
3. Conclure.