Exercice 1 (Groupe ou non ?)
Lesquels sont des groupes ? Lesquels n'en sont pas ?

1. $(\mathbb{N}, +)$.
2. $(\mathbb{Z}, +)$.
3. $(\mathbb{Q}, +)$.
4. $(\mathbb{R}, +)$.
5. $(\mathbb{R}_+^*, +)$.
6. $(\mathbb{Z}, \times)$.
7. $(\mathbb{N}^*, \times)$.
8. $(\mathbb{Q}, \times)$.
9. $(\mathbb{Q}^*, \times)$.
10. $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.
11. $(\mathbb{R}^*, \times)$.
12. $(\mathbb{R}_-^*, \times)$.
13. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
14. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$.
15. $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$.

Exercice 2 (Groupe des permutations)
Soit E un ensemble non vide, $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des bijections de E — ou ensemble des *permutations* de E. Montrer que $(\mathfrak{S}_E, \circ)$ est un groupe.

Exercice 3 (Permutations et commutativité)
Montrer que le groupe $(\mathfrak{S}_E, \circ)$ est abélien si et seulement si $|E| \leq 2$.

Exercice 4 (Groupe d'ordre 3)
Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e tel que pour tout $x \in G$ on a $x^3 = e$. Montrer que pour tout couple $(x, y) \in G^2$ on a :

$$(xy)^2 = y^2x^2 \text{ , } xy^2x = yx^2y \text{ et } x^2yx^2 = y^2xy^2.$$

Exercice 5 (Intersection de groupes)
Soit I un ensemble, $(\Gamma, *)$ un groupe et $(G_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de Γ indexés par I. Montrer que l'intersection $\bigcap_{i\in I} G_i$ est un sous-groupe de Γ.

Exercice 6 (Sous-groupes fini)
Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie finie non-vide de G stable par $*$. Montrer que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Exercice 7 (Sous-groupes de Z)
Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont exactement les ensembles de la forme $d\mathbb{Z} = \{dk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, où $d \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8 (Réunion de sous-groupes)
Soit $(\Gamma, *)$ un groupe et G, H deux sous-groupes de Γ. Montrer que $G \cup H$ est un sous-groupe de Γ si et seulement si $G \subseteq H$ ou $H \subseteq G$.

Exercice 9 (Sous-groupe engendré et PGCD)
Soit $S \subseteq \mathbb{Z}$ une partie de $\mathbb{Z}$. Montrer que le sous-groupe $d\mathbb{Z} = \langle S \rangle$, où d est le plus grand commun diviseur des éléments de S.

Exercice 10 (Endomorphismes de Z)
Trouver tous les endomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 11 (Groupe des automorphismes)
Soit $(G, *)$ un groupe et Aut_G l'ensemble des automorphismes de G, *i.e.* l'ensemble des morphismes de groupes bijectifs de $(G, *)$ dans lui-même. Montrer que $(\mathrm{Aut}_G, \circ)$ est un groupe.

Exercice 12 (Conjugaison et automorphisme)
Soit $(G, *)$ un groupe et x un élément de G. L'application $\varphi_x : y \to x^{-1} * y * x$ est appelée *morphisme de conjugaison par* x — ou *automorphisme intérieur* induit par x. Justifiez ce nom en montrant que φ_x est bien un automorphisme de G.

Exercice 13 (Sous-groupe distigué fini)
Soit $(G, *)$ un groupe fini et $(H, *)$ un sous-groupe tel que $|G| = 2|H|$. Montrer que $(H, *)$ est distingué.

Exercice 14 (Sous-groupe distingué et produit)
Soit $(G, *)$ et $(H, \circledast)$ deux groupes, $G' \subseteq G$ et $H' \subseteq H$ deux sous-groupes distingués de G et H $(G \times H, \odot)$ le produit direct de G et H. Montrer que $G' \times H'$ est un sous-groupe distingué de $G \times H$.

Exercice 15 (Égalité des quotients)
Soit $(G, *)$ un groupe fini, $H \subseteq G$ un sous-groupe de G et x, y deux éléments de G. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. $x * H = y * H$;
2. $(x * H) \cap (y * H) \neq \emptyset$;
3. $x^{-1} * y \in H$.

Exercice 16 (Groupe infini à ordres finis)
Monter que le groupe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ est un groupe infini dont tout élément est d'ordre fini, et en déduire qu'il n'est engendré par nul ensemble fini.