Polygones équidécomposables

Margaret Bilu

8 février 2014

Dans ce qui suit, nous allons étudier les puzzles qu'on peut assembler de deux manières. Autrement dit, nous allons chercher à savoir à quelle condition est-ce qu'on peut découper un certain polygone en morceaux, et réarranger les morceaux pour en former un autre polygone. Puis nous allons étudier quels mouvements il faut faire subir aux pièces pour faire cela. Par polygone nous entendrons toujours une région bornée du plan délimitée par une ou plusieurs lignes brisées fermées ne se croisant pas, les segments constituant les lignes brisées étant en nombre fini. Ces segments sont appelés arêtes du polygone et leurs extrémités sont appelées sommets. En particulier, on autorise les polygones « à trous », mais on n'autorise pas les polygones croisés.

1 Polygones équidécomposables

Définition 1.1. *On dit qu'un polygone P est équidécomposable avec un polygône P' si on peut découper P en un nombre fini de polygones et les réarranger pour former le polygone P'.*

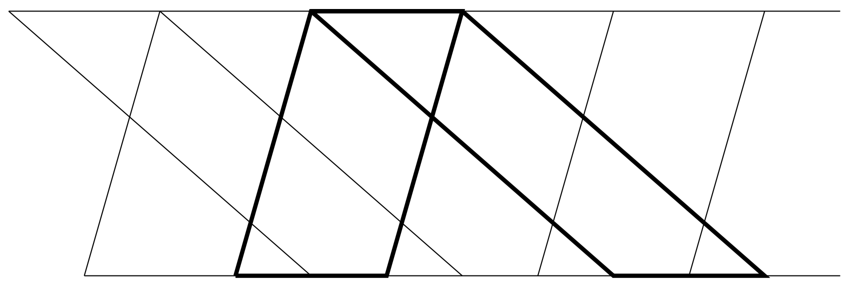
1. Vérifier que la relation d'équidécomposabilité est symétrique, c'est-à-dire que si P est équidécomposable avec P', alors P' est équidécomposable avec P. Cela a donc un sens de dire « P et P' sont équidécomposables ».
2. Expliquer pourquoi deux polygones équidécomposables ont la même aire.
3. La remarque que nous venons de faire est fondamentale dans nombre de calculs d'aire que vous avez effectués au collège. Le principe est toujours le même : on part d'une figure dont on veut calculer l'aire, et on la découpe en morceaux qu'on assemble pour former une figure dont l'aire est plus simple à calculer.
   a) Comment calculez-vous l'aire d'un parallélogramme ?
   b) Montrer qu'un triangle est toujours équidécomposable avec un certain parallélogramme.
   c) En déduire qu'un triangle est toujours équidécomposable avec un certain rectangle.

Il est naturel de se demander si réciproquement, deux polygones ayant la même aire sont équidécomposables. La réponse est oui, donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.1. *(Bolyai, Gerwien, Wallace) Deux polygones de même aire sont équidécomposables.*

Les mathématiciens à qui l'on doit se théorème l'ont prouvé tous les trois indépendamment : l'écossais William Wallace en 1807, le prusse Paul Gerwien en 1833, et le hongrois Farkas Bolyai (père de János Bolyai, qui a découvert la géométrie non-euclidienne en même temps que Lobatchevski) autour de 1833 également. Nous allons prouver ce théorème en plusieurs petites

étapes. La première est celle qui va nous permettre, pour montrer que deux polygones sont équidécomposables, de simplement montrer qu'ils sont équidécomposables avec un même troisième polygone.
4. Montrer que si le polygone P est équidécomposable avec P', et si P' est équidécomposable avec P'', alors P est équidécomposable avec P''. (Autrement dit, la relation d'équidécomposabilité est *transitive*.)
5. Expliquer grâce au dessin suivant pourquoi deux parallélogrammes de même aire ayant un côté en commun sont équidécomposables :



6. Utiliser la question précédente pour montrer que deux rectangles de même aire sont équidécomposables.
7. Expliquer comment on peut découper un polygone en triangles. En déduire qu'un polygone est équidécomposable avec un rectangle qui a la même aire que lui.
8. Conclure la démonstration du théorème.

2 Théorème de Hadwiger-Glur

2.1 S-équidécomposabilité

Dans la démonstration du théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien, nous ne nous sommes préoccupés que du découpage des pièces, et pas du tout de la manière dont ont les déplace pour former le deuxième polygone.
9. Commençons par quelques généralités sur les transformations du plan.
a) Rappeler ce qu'est une rotation, une symétrie centrale, une translation.
b) Expliquer pourquoi un déplacement d'un polygone dans le plan est toujours la composée d'une rotation et d'une translation.

Ainsi, pour réussir à déplacer les pièces en lesquelles on a découpé le premier polygone de sorte à former le second polygone grâce au théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien, on leur fait subir des rotations et des translations. L'objectif de cette partie est de montrer qu'en fait, il suffit de faire des symétries centrales et des translations. Plus précisément :

Définition 2.1. *On dit qu'un polygone P est S-équidécomposable avec un polygone P' (le S se rapportant au mot « symétrie ») si on peut découper P en des polygones $A_1, \ldots, A_n$ et P' en des polygones $B_1, \ldots, B_n$ de sorte que pour tout i, B_i s'obtienne à partir de A_i à l'aide de symétries centrales et de translations.*

10. Montrer en particulier que les pièces A_i et B_i ont leurs côtés deux à deux parallèles.
11. Montrer que la relation de S-équidécomposabilité est symétrique. Cela a donc un sens de dire « P et P' sont S-équidécomposables ».

2.2 Symétries centrales et translations

12. Montrer que la composée $s_2 \circ s_1$ de deux symétries centrales est une translation. Exprimer le vecteur de cette dernière en fonction des centres O_1 et O_2 respectifs de s_1 et s_2.
13. Montrer que la composée $s \circ t$ d'une translation t de vecteur $\vec{u}$ et d'une symétrie de centre O est une symétrie centrale dont on identifiera le centre en fonction de $\vec{u}$ et O.
14. Soit S l'ensemble des transformations du plan qui sont soit des symétries centrales, soit des translations. Déduire des questions précédentes que la composée de deux éléments de S est encore un élément de S.

2.3 Démonstration du théorème

Dans cette sous-partie, nous allons montrer le théorème suivant, démontré en 1951 par les mathématiciens suisses Hadwiger et Glur :

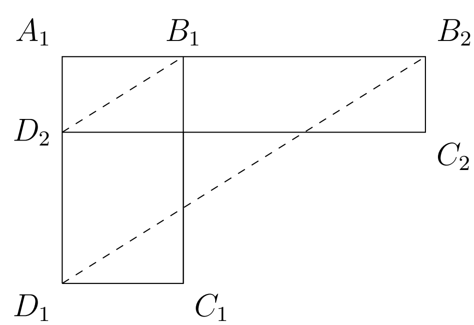
Théorème 2.1. *(Hadwiger-Glur) Deux polygones de même aire sont S-équidécomposables.*

15. De même que dans la partie 1, montrer que la relation de S-équidécomposabilité est transitive, donc que si P est S-équidécomposable avec P', et P' est S-équidécomposable avec P'', alors P et P'' sont S-équidécomposables.
16. Vérifier qu'un triangle est toujours S-équidécomposable avec un certain rectangle.
17. Vérifier de même que deux parallélogrammes de même aire et ayant un côté en commun sont S-équidécomposables.
18. La partie technique de la preuve consiste à montrer que deux rectangles de même aire sont S-équidécomposables, car c'est en fait la seule étape de la preuve du théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien où on a véritablement utilisé une rotation. Soient $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ deux rectangles de même aire.

a) Montrer que $ABCD$ est S-équidécomposable avec un certain rectangle $A_2B_2C_2D_2$ qui a ses côtés parallèles à ceux de $A_1B_1C_1D_1$.

b) Pourquoi peut-on sans perte de généralité supposer que $A_1B_1 < A_2B_2$ et $A_2D_2 < A_1D_1$?

c) Conclure à l'aide du dessin suivant :



Indication : quelle est la position relative des droites (B_2D_1) et (B_1D_2) ?
19. Montrer que tout polygone est S-équidécomposable avec un rectangle de même aire.
20. Conclure la démonstration du théorème d'Hadwiger-Glur.

3 Et sans symétries centrales ?

3.1 T-équidécomposabilité

Au vu de ce que nous avons vu plus haut, on peut naturellement se demander si dans l'énoncé du théorème d'Hadwiger-Glur on ne pourrait pas également se passer des symétries centrales.

Définition 3.1. *Un polygone P est T-équidécomposable avec un polygone P' (le T se rapportant au mot « translation ») si on peut découper P en des polygones $A_1, \ldots, A_n$ et P' en des polygones $B_1, \ldots, B_n$ de sorte que pour tout i, B_i s'obtienne à partir de A_i à l'aide d'une translation.*

21. Montrer que la relation de T-équidécomposabilité est symétrique.

3.2 Un invariant additif

Nous allons voir que la réponse à la question formulée plus haut est négative, grâce à un argument d'*invariant*.

Soit P un polygone. On oriente ses côtés (en leur ajoutant des flèches de direction) de sorte que si une fourmi marchait le long des flèches dessinées, l'intérieur du polygone serait à sa gauche, et l'extérieur à sa droite. On fixe une droite ℓ également orientée, et on définit la grandeur $J_\ell(P)$, appelée *invariant du polygone P par rapport à ℓ* de la manière suivante : c'est la somme des longueurs des côtés de P parallèles à ℓ, comptés avec un signe $+$ pour ceux qui sont orientés dans le même sens que ℓ et avec un signe $-$ pour ceux qui sont orientés dans le sens contraire à celui de ℓ.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème sur les invariants, encore dû à Hadwiger et Glur.

Théorème 3.1. *Soient P et P' deux polygones. S'il existe une droite orientée ℓ telle que $J_\ell(P) \neq J_\ell(P')$, alors les polygones P et P' ne sont pas T-équidécomposables.*

Avant de démontrer ce théorème, familiarisons-nous un peu avec la définition de J_ℓ :

22. Soit P un triangle. Calculer les différentes valeurs que peut prendre $J_\ell(P)$ suivant la position et l'orientation de la droite ℓ.

23. Même question quand P est un parallélogramme.

24. Soit P un polygone, et P' un polygone obtenu à partir de P à l'aide d'une translation. Montrer que pour toute droite orientée ℓ, $J_\ell(P) = J_\ell(P')$. Autrement dit, J_ℓ est *invariant par translation.*

25. Soit P un polygone découpé en des polygones $A_1, \ldots, A_n$ et soit ℓ une droite orientée. Montrer que

$$J_\ell(P) = J_\ell(A_1) + \ldots + J_\ell(A_n).$$

Autrement dit, J_ℓ est un *invariant additif.*

26. En déduire la démonstration du théorème ci-dessus.

27. Montrer qu'il existe des polygones de même aire qui ne sont pas T-équidécomposables.