1 Introduction

1.1 Première approche du problème

Question 1. Y a-t-il moins de nombres pairs que d'entiers dans $\mathbb{N}$?

Question 2. Y a-t-il plus de réels dans $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$?

Intuitivement, il y a autant de droites qui passent au dessus de la première bissectrices que de droites qui passent en dessous. Pourtant ces droites sont parametrées pas $y = ax$ avec $a \in]0;1[$ en dessous et $y \in]1;+\infty[$ au dessus...

Comment comparer le nombre d'éléments d'ensembles infinis ? Cette question a été étudiée par le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918).

1.2 Rappels

Définition 1. Une fonction $f : A \to B$ est **injective** si $\forall (x, y) \in A^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Définition 2. Une fonction $f : A \to B$ est **surjective** si $\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$.

Définition 3. Une fonction $f : A \to B$ est **bijective** si elle est injective et surjective, *ie.* $\forall y \in B, \exists! x \in A, f(x) = y$.

1.3 Retour à la question initiale

Définition 4. On dit que deux ensembles A et B sont **équipotents** s'il existe une bijection entre A et B.

Exemple 5. $[|1, n|]$ et $[|n + 1, 2n|]$ sont équipotents.

Exemple 6. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents.

Exemple 7. $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N} + 1$ sont équipotents.

Exemple 8. $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ sont équipotents.

Exemple 9. $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ sont équipotents.

Définition 10. On dit qu'un ensemble A est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A est équipotent à $[|1, n|]$.

Définition 11. On dit qu'un ensemble est infini s'il n'est pas fini.

Proposition 12. "A est infini" $\Leftrightarrow$ "Il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans A."

2 Dénombrabilité

2.1 Définition

Définition 13. On dit qu'un ensemble est **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$, *ie.* s'il existe une bijection entre cet ensemble et $\mathbb{N}$.

Exemple 14. $\mathbb{N}^*, 2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1$, l'ensemble des nombres premiers

Proposition 15. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Proposition 16. $\mathbb{Z}$ est dénombrable

2.2 Les rationels

Proposition 17. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable

Corollaire 18. $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Corollaire 19. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

2.3 Opérations sur les dénombrables

Proposition 20. Produit de deux dénombrables est dénombrable

Corollaire 21. Pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{N}^k$ est dénombrable.

Proposition 22. Produit fini de dénombrables est dénombrable

Proposition 23. Union dénombrable de dénombrables est dénombrable

Corollaire 24. L'ensemble des polynômes à coefficients entiers $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.

Corollaire 25. L'ensemble des mots sur un alphabet fini est dénombrable.

3 Ensembles non dénombrables

3.1 Premiers exemples

Proposition 26. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Corollaire 27. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Corollaire 28. Un produit dénombrable d'ensemble dénombrables n'est pas dénombrables.

3.2 La puissance du continu

Définition 29. On dit qu'un ensemble a **la puissance du continu** s'il est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Théorème 30. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. (Cantor)

Corollaire 31. L'ensemble des irrationnels n'est pas dénombrable.

Exemple 32.]0,1[et $\mathbb{R}$ sont equipotents.

Proposition 33. $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.

Corollaire 34. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents.

3.3 Nombres transcendants

Définition 35. On dit qu'un nombre est **algébrique** s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers.

Exemple 36. $\frac{3}{4}, \sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont algébriques.

Corollaire 37. L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Définition 38. Un nombre réel non-algébrique est dit **transcendant**.

Théorème 39. Il existe des nombres transcendants. (Liouville)

Exemple 40. π (Lindemann 1882), e (Hermite 1873), $\ln(2)$ (Hardy et Wright 1979), $\sin(1)$ (idem).

Remarque 41. Il n'est pas encore prouvé que $e+\pi$ et $e\pi$ sont transcendants.

Remarque 42. Paradoxalement, la "plupart" des réels sont transcendants mais on en connaît peu.

4 Cantor Bernstein

Théorème 43. S'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A alors A et B sont équipotents.

Corollaire 44. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents.

5 Notion de densité

Définition 45. On dit qu'une partie A de X est **dense** dans X si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

Théorème 46. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 47. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Dénombrabilité

CLUB PARIMATHS – groupe avancé

Matthieu Lequesne

Samedi 4 janvier 2014

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 Soit D un ensemble dénombrable, N un ensemble non dénombrable, A un ensemble quelconque. Prouver les assertions suivantes :

a) Si A est en bijection avec D, alors A est dénombrable.
b) A est en bijection avec N, alors A n'est pas dénombrable.
c) $A \subset D$, alors A est fini ou dénombrable.
d) Si $N \subset A$, alors A n'est pas dénombrable.
e) S'il existe une surjection de D dans A, alors A est fini ou dénombrable.
f) S'il existe une injection de N dans A, alors A n'est pas dénombrable.
g) S'il existe une injection de A dans D, alors A est dénombrable.
h) S'il existe une surjection de A dans N, alors A n'est pas dénombrable.

Exercice 2 Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

– $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$
– $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
– $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$
– L'ensemble des nombres premiers
– L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 3 Soit X un ensemble.

– Montrer qu'il existe une injection de X dans $\mathcal{P}(X)$.
– Montrer qu'il n'existe pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$. (Cantor)

Exercice 4 Soient a, b, c, d des réels tels que, $a < b$ et $c < d$. Montrer que les intervalles ouverts $]a; b[$ et $]c; d[$ sont équipotents.

Exercice 5 $(*)$ Montrer que $]0, 1[$ et $[0; 1]$ sont équipotents.

Exercice 6 $(*)$ Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 7 $(**)$ Montrer que $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$) n'est pas dénombrable.

Exercice 8 $(**)$ Soit X un ensemble. Montrer que X est infini si et seulement si il existe une application f de X dans X injective et non surjective.

Exercice 9 $(***)$ Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des points où f n'est pas continue est fini ou dénombrable.

Exercice 10 $(***)$ Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.