

COMBINATOIRE

PARIMATHS

Samedi 15 février 2013

Joon KWON



EXERCICE 1. — On souhaite ranger sur une étagère k livres de mathématiques (distincts), m livres de physique, et n de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

- 1) si les livres doivent être groupés par matières ;
- 2) si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

EXERCICE 2. — Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1. Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

- 1) A .
- 2) A_1 , l'ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.
- 3) A_2 , l'ensemble des nombres pairs de A .

EXERCICE 3 (*Nombres de Fibonacci 1*). — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de manières de recouvrir un rectangle de taille $2 \times n$ avec des pièces de taille 1×2 . Trouver une relation de récurrence entre les a_n .

EXERCICE 4 (*Nombres de Fibonacci 2*). — On dispose d'un domino de largeur 1 et de longueur n . On note A_n le nombre de coloriages possibles de ce domino, c'est-à-dire le nombre de façons différentes de noircir ou non les cases. On note F_n le nombre de façons de colorier ce domino de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux cases voisines noircies.

- 1) Calculer A_n .
- 2) Calculer F_1, F_2, F_3 et F_4 .

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+p+1} = F_n F_p + F_{n-1} F_{p-1}$.

EXERCICE 5. — Quel est le nombre de manières d'asseoir n couples mariés mari-épouse autour d'une table ronde de $2n$ places de sorte que les hommes et les femmes soient alternés ? (On considérera qu'une configuration où chaque personne s'est décalée de k places est différente de la configuration initiale).

EXERCICE 6. — Soit n et k entiers tels que $1 \leq k \leq n$. Donner deux démonstrations de la formule suivante : $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + \dots + C_k^k$.

EXERCICE 7. — Quel est le nombre de m -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$ vérifiant $x_1 + \dots + x_m = n$?

EXERCICE 8. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $2n$ points sur le bord d'un cercle. On note F_n le nombre de façons de relier ces points, deux à deux, à l'aide de n cordes qui ne se recoupent pas à l'intérieur du cercle. Trouver une relation de récurrence entre les F_n .

EXERCICE 9. — Trouver une formule simple pour $\sum_{k=1}^n C_n^k k^2$.

