

# Club de maths d'Orsay - Exercices d'arithmétiques

Amine Marrakchi

28 septembre 2013

**Exercice 1** Quelles sont les solutions entières de

$$x^2 + y^2 = 7z^2$$

**Exercice 2** Soit  $x$  et  $y$  deux entiers positifs. Montrer que si

$$A = \frac{x^2 + y^2 + 1}{xy}$$

est un entier alors  $A = 3$ .

**Exercice 3** Soit  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  des entiers deux à deux distincts dans  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ . Montrer qu'il existe  $i$  et  $j$  distincts tels que  $a_i$  divise  $a_j$ .

**Exercice 4** Soit  $p$  un nombre premier impair. Montrer que  $p$  divise le numérateur de

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1}$$

**Exercice 5** Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers premiers entre eux dans leur ensemble tels que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

Montrer que  $a + b$  est un carré parfait.

**Exercice 6** Quels sont les entiers relatifs  $x$  pour lesquels

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

est un carré parfait ?

**Exercice 7** Montrer que

$$\sqrt{\varphi(n)\sigma(n)} \leq n \leq \frac{\varphi(n) + \sigma(n)}{2}$$