Cours du Samedi 14 Juin.

Introduction : rappels sur les ensembles (notations et produit cartésien de deux ensembles), intersections, réunions (et somme) de deux ensembles et résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

I) Groupes et espaces vectoriels.

1) Groupes.

Définition. Un groupe est la donnée d'un ensemble G et d'une loi de composition interne notée $*$ définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccc} * : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

et telle que $(G, *)$ vérifie les trois propriétés suivantes :
(1) (Elément neutre) Il existe e dans G tel que $\forall\, x \in G$, $e * x = x * e = x$.
(2) (Associativité) Pour tout x, y, $z \in G$, $(x * y) * z = x * (y * z) = x * y * z$.
(3) (Elément inverse) Pour tout x dans G, il existe x' dans G tel que : $x * x' = x' * x = e$. On pourra noter : $x' = x^{-1}$ à ne pas confondre avec la notation $\dfrac{1}{x}$.
Si de plus $\forall\, x, y \in G$, $x * y = y * x$, on dit que la loi $*$ est commutative et que $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Exemples : $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien. En effet, la loi $+$ est bien une loi de composition interne de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ (la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif), $0 \in \mathbb{Z}$ est élément neutre pour la loi $+$, $+$ est associative et pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que : $x + y = y + x = 0$: on prend $y = -x$. Enfin, la loi $+$ est commutative.

D'autres groupes seront cités par les élèves. Par contre, $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe. En effet, $2 \in \mathbb{N}$ mais 2 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{N}$ muni de $+$ car $-2 \notin \mathbb{N}$.

Propriétés. Soit $(G, *)$ un groupe.
1) L'élément neutre de G est unique.
2) L'inverse y d'un élément x de G est unique.
3) L'inverse de l'inverse de x est x.
4) Pour tous x,$y \in G$, $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
5) Pour tous x, y, $z \in G$, si $x * y = x * z$ alors $y = z$.

Preuves.
1) Soient e et e' deux éléments neutres de G.
e' est élément neutre de G donc $e' * e = e * e' = e$ (c'est le point (1) de la définition pour $x = e$).
e est élément neutre de G donc $e * e' = e' * e = e'$. Ainsi, $e = e'$.
2) Soit $x \in G$ d'inverses : $y \in G$ et $z \in G$.
On a alors : $x * y = e$ ainsi $z * x * y = z * e = z$ de plus, $z * x = e$ donc $z * x * y = e * y = y$ ainsi $y = z$.
3) Soit $x \in G$.
On a : $(x^{-1})^{-1} * x^{-1} = e$ puisque $(x^{-1})^{-1}$ est l'inverse de x^{-1}.
De plus, $x * x^{-1} = e$ (car x est l'inverse de x^{-1}) donc par unicité de l'inverse (propriété 2), on a : $x = (x^{-1})^{-1}$.
4) Soient x, $y \in G$. On note : $x^{-1} \in G$ l'inverse de x et $y^{-1} \in G$ celui de y.
On a : $(x * y)^{-1} * (x * y) = e$ donc : $(x * y)^{-1} * (x * y) * y^{-1} = e * y^{-1} = y^{-1}$.
Par associativité de $*$, on a : $(x * y) * y^{-1} = x * (y * y^{-1}) = x * y * y^{-1} = x$. Dès lors, on obtient : $(x * y)^{-1} * (x * y) * y^{-1} = (x * y)^{-1} * x = y^{-1}$ ainsi, $(x * y)^{-1} * x * x^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ donc : $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
5) Soient x, y, $z \in G$ tels que : $x * y = x * z$. On a alors : $x^{-1} * x * y = x^{-1} * x * z$ donc $y = z$.

2) Espaces vectoriels.

Dans ce qui suit on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K}$ est appelé : corps des scalaires). Dans les exemples, on ne parlera que d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Définition. On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni de deux lois : $+$ et $\times$ vérifiant :
1) $(E, +)$ est un groupe commutatif (i.e : $+$ est une loi de composition interne de $E \times E$ dans E, $+$ est associative, E possède un unique élément neutre, tout élément de E a un unique inverse et $+$ est commutative).
2) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, pour tout $x \in E$, $\lambda \times (\mu \times x) = (\lambda\mu) \times x$ et $1 \times x = x$.
3) $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E et dans $\mathbb{K}$.

Les éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Exemples.
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2) $\mathbb{R}[X]$: l'ensemble des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque : $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. On étudiera par la suite la notion de dimension d'un espace vectoriel.

En général, il est peu pratique de démontrer qu'un ensemble donné est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec la définition, il est plus facile de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (dorénavant abrégé : s.e.v) si F vérifie les conditions suivantes :
1) $0 \in F$.
2) $\forall\, x, y \in F$, $x + y \in F$ (F est stable par addition).
3) $\forall\, x \in F$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$ (F est stable par la multiplication par un scalaire).

Remarques.
1) Tout s.e.v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2) Les points 2 et 3 de la définition peuvent être fusionnés en un seul : au lieu de montrer que F est stable par addition et par multiplication par un scalaire, on peut montrer que $\forall\, x,\, y \in F$, $\forall\, \lambda,\, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda x + \mu y \in F$, autrement dit : que F est stable par combinaisons linéaires.

Exercice 1.

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).
Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux s.e.v de E.
Alors, $F + G$ et $F \cap G$ sont des s.e.v de E.

Exercice 2.
1) Démontrer la propriété précédente.
2) On reprend les notations de la propriété précédente.
L'ensemble $F \cup G$ est-il toujours un s.e.v de E ?

Définition : sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $e_1, ..., e_n$ n vecteurs de E. On note $Vect(e_1, ..., e_n)$ le s.e.v engendré par les vecteurs $e_1, ..., e_n$: c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des e_i, $1 \leq i \leq n$. On peut écrire : $x \in Vect(e_1, ..., e_n) \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}, \forall\, i \in \{1, ..., n\}$.

Exemple. On considère : $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$.
On a : $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1), x \in \mathbb{R}\} = Vect\{(1, 1)\}$.
Tous les vecteurs de F sont alors des combinaisons linéaires du vecteur $(1, 1)$.

Exercice 3.

On note : $E = \mathbb{R}^3$.
On considère les ensembles F et G tels que : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0,\, x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$. Déterminer les vecteurs qui engendrent F et ceux qui engendrent G.

II) Applications linéaires.

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On dit que $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si :
1) $\forall\, x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2) $\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
On note $\mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque. Les points 1 et 2 de la définition peuvent être fusionnés en un seul : on dit que f est linéaire si : $\forall\, x$, $y \in E$, $\forall\, \lambda$, $\mu \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Définitions. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
1) On dit que f est surjective si $\forall\, y \in F$, $\exists\, x \in E$ tel que : $y = f(x)$.
2) On dit que f est injective si $\forall\, x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
3) On dit que f est bijective si f est injective et surjective.

Vocabulaire. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une application linéaire de E dans lui-même est appelée : endomorphisme de E.
Une application linéaire bijective entre deux espaces vectoriels est un isomorphisme.
Un endomorphisme de E bijectif est un automorphisme de E.

Définition. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
On appelle image de f le s.e.v de F : $\mathrm{Im}\, f = f(E) = \{f(x), x \in E\}$.

Définition. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
On appelle noyau de f le s.e.v de E : $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : f(x) = 0\}$.

Propriété.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
1) f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.
2) f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.

Exercice 4. Démontrer les points 1 et 2 de la propriété précédente.

Exercice 5. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, 2x + 2y) \end{array}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$.
3) L'application linéaire f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

III) Familles de vecteurs et dimension d'un espace vectoriel.

Définitions. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
1) On dit qu'une famille $F = \{e_1, ..., e_n\}$ de vecteurs de E est une famille génératrice de E si tous les vecteurs de E peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs de la famille F, i.e : $\forall\, x \in E$, $\exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

tel que : $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
2) On dit qu'une famille $F = \{e_1, ..., e_n\}$ de vecteurs de E est une famille libre si on a : $\forall\ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. On dit que les vecteurs $e_1, ..., e_n$ sont linéairement indépendants.
3) On dit qu'une famille $B = (e_1, ..., e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si elle est libre et génératrice de E.
4) On dit que E est de dimension finie si E admet une famille génératrice finie.

Théorème de la base incomplète (admis). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0\}$. Soient $\{\ell_1, ..., \ell_p\}$ une famille libre de E et $\{g_1, ..., g_q\}$ une famille génératrice de E.
Alors il existe un entier $n \geq p$ et une base $(e_1, ..., e_n)$ de E tels que :
1) pour tout $i \leq p$, on a : $e_i = \ell_i$;
2) pour tout $i > p$, on a : $e_i \in \{g_1, ..., g_q\}$.

Corollaire. Tout espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0\}$ admet au moins une base.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie.
Comme $E \neq \{0\}$, il existe au moins un vecteur $\ell \in E$ tel que $\ell \neq 0$. Donc la famille $\{\ell\}$ est libre. De plus, E est de dimension finie donc il a une famille génératrice : $\{g_1, ..., g_q\}$ finie. L'existence d'une base de E est alors une conséquence du théorème de la base incomplète.

Remarque. Le théorème de la base incomplète affirme que l'on peut obtenir une base en ajoutant des éléments d'une famille génératrice à une famille libre. La base obtenue aura donc au moins autant d'éléments que la famille libre considérée. De cette remarque, découle la propriété ci-dessous :

Propriété (admise). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie.
Soient $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\{\ell_1, ..., \ell_p\}$ une famille libre de E. Alors $p \leq n$.

Théorème. Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0\}$ ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0\}$.
Soient $B_1 = (e_1, ..., e_n)$ et $B_2 = (f_1, ..., f_p)$ deux bases de E. Montrons que $n = p$.
Puisqu'en particulier B_1 est une famille libre et B_2 est une base de E, on a : $n \leq p$ mais B_1 est une base de E et B_2 est une famille libre donc $p \leq n$. Ainsi, $n = p$.

Définition. Etant donné E : un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$, le nombre d'éléments de chacune des bases de E est appelé : dimension de E. On note dim E la dimension de l'espace vectoriel E.

Exercice 6.
Soient $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que les vecteurs e_1, e_2 et e_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ un s.e.v de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de F puis la dimension de F.

Théorème du rang (en dimension finie). Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors :

$$rgf + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$$

où rgf désigne le rang de f, i.e : la dimension de l'image de f.

Exercice 8.

On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP(X) \end{array}$$

où $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n étant un entier naturel non nul).

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) On note : $P_i(X) = X^i, \forall\, i \in \mathbb{N}$.
On admet que $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$ et $P_3(X)$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et que $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$, $P_3(X)$ et $P_4(X)$ forment une base de $\mathbb{R}_4[X]$. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$? Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$?
3) Calculer $f(P_i(X)), \forall\, 0 \leq i \leq 3$.
4) Démontrer la propriété suivante : soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (supérieures ou égales à 1) et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors, l'image d'une base de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Déduire de cette propriété une base puis la dimension de $\operatorname{Im} f$ (où f est l'application linéaire définie au début de l'exo).
5) Déduire de la question précédente que f est injective.
6) L'application linéaire f est-elle bijective ?

Exercice 9.
On note E l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
1) Déterminer les deux suites géométriques notées (a_n) et (b_n) (de raisons non nulles) qui appartiennent à E.
2) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) forment une base de E et en déduire la dimension de E.
3) Soit $(\mathcal{F}_n)$ la suite de E telle que : $\mathcal{F}_0 = 0$ et $\mathcal{F}_1 = 1$.
Déterminer, à l'aide des questions précédentes, le terme général de la suite $(\mathcal{F}_n)$. De quelle suite s'agit-il ?