Cours d'algèbre

27 janvier 2014

Cours

Identités

Binôme de Newton.
$a^n - b^n$ pour tout n, $a^n + b^n$ pour n impair.

Inégalités

Un carré est toujours positif! Donc $(a-b)^2 \geq 0$.
Inégalités entre moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique.

Exercices

Exercice 1 $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = 1$. Montrer que $a^3 + b^3 = a + b$.

Exercice 2 Montrer que $8^n - 1$ n'est pas premier pour $n \geq 2$.

Exercice 3 Soit $x > 0$, montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 4 Trouver le minimum de $\frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}$.

Exercice 5 Soit $a_1, \cdots, a_n$ des réels positifs dont le produit fait 1. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geq 2^n$$

Puis, de même en remplaçant 1 par k et 2 par $k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarques général.
Les exercices sont de niveaux variés, allant jusqu'à début de sup, les exercices ne sont pas donnés dans un ordre particulier.
Certains exercices n'utilisent pas du tout la notion de limite il s'agit des exercices, 4, 6, 8, 9, et 10.
Certains élèves ont réussis une grande partie des exercices, le niveau était assez hétérogène, il y avait des personnes qui découvraient les suites, et d'autres qui connaissaient bien Bolzano-Weierstrass.
Cependant tous ont fait au moins trois exercices presque entièrement par eux même (le 10, le 6 et le 9 par ordre croissant de difficulté).
Les exercices qui ont été corrigé en classe sont le 3, le 6, le 8 (rapidement), le 9 et le 10.

Exercice 1 .
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornée, montrer qu'il existe une suite à valeurs entière ϕ telle que la suite $(\mathrm{u}_{\phi(n)\,n\in\mathbb{N}})$ soit convergente.

Exercice 2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergente de limite l, montrer que la suite définie par

$$(v_n) = \frac{u_0 + u_1 + .. + u_n}{n+1}$$

converge vers la même limite l.

Exercice 3.
Calculer la limite de la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 4.
On définit la suite u_n par $u_1 = 1989^{1989}$, et pour $n > 1$ u_n est la somme des chiffres de u_{n-1}. Calculer u_5.

Exercice 5.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $[0,1]$ telles que $\lim u_n v_n = 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

Exercice 6.
Determiner $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n et d'un de ses premiers termes quand u_n est définie par la relation de récurrence suivante
$4u_{n+2} = u_n$

Exercice 7.
Soit $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $((p_n)_{n\in\mathbb{N}},(q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}x\mathbb{N}^*$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de rationnels, supposons que u_n tende vers un irrationnel x. Montrer que $|p_n|$ et q_n tendent alors vers $+\infty$.
Exercice 8.
Peut-on trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels, strictement croissante et telle que $\forall(n,m) \in \mathbb{N}^*$ $u_{nm} = u_n + u_m$
Exercice 9.
Un riche marchand possède 9 sacs d'or.
1 de ces sacs contient de fausses pièces, une fausse pièce pèse 11g tandis qu'une vraie pièce pèse 10g. Chaque sac contient 50 pièces.
On dispose d'une balance électronique d'une grande précision qui donne la masse en grammes.
Comment faire pour savoir quel est le sac qui contient de fausses pièces en une seule pesée ?
Exercice 10.
On Numérote les pages d'un livre de 1 à n , la page 1 est a droite en additionnant les numéros de toutes les pages, on trouve 2007 , mais on remarque que deux pages étaient restées collées.
Quel est le nombre de pages de ce livre, et quel sont les numéros des pages restées collées ?
Exercice 11
Montrer qu'il n'existe pas de suite (u_n) telle que pour tout réel $l \in [0,1]$ il existe un entier k tel que $u_k = l$.
Exercice 12
Une suite est dite de Cauchy si l'écart entre ces termes tend vers 0 en $+\infty$ montrez qu'une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.