# Sous groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$

**Théorème.** Tout groupe fini de $\mathcal{SO}(3)$ est de l'un des cinq types suivants :
- Un groupe cyclique engendré par une rotation d'axe $\Delta$ et d'angle $2\pi/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
- Un groupe diédral $D_n$.
- $\mathfrak{A}_4$.
- $\mathfrak{S}_4$.
- $\mathfrak{A}_5$.

---

**Équation aux classes.** Soit $G$ un tel groupe (non trivial). On note $n$ son ordre et $e$ l'identité. Pour tout point $g \in G \setminus \{e\}$, $g$ est une rotation d'axe $\Delta_g$ dont l'action naturelle sur la sphère unité admet alors deux points fixes, notés $x_g$ et $x'_g = -x_g$. On appelle ces points des pôles de $G$ et on note leur ensemble $\mathscr{P}$ (qui est fini, de cardinal inférieur à $2n-1$). Il est clair que si $x$ est un pôle, $-x$ en est un aussi. L'ensemble des rotations de $G$ d'axe $\mathbb{R}x$ s'identifie (via projection sur $\{x\}^\perp$ à un sous-groupe $G_x$ de $\mathcal{SO}(2)$ et est donc cyclique. Notons $n_x$ l'ordre de ce sous groupe.

Soit $x$ un pôle de $G$. On note $\mathcal{O}(x)$ l'orbite de $x$ sous $G$. Si $y \in \mathcal{O}(x)$, il existe $g_0 \in G$ qui envoie $x$ sur $y$. Ainsi, $\forall g \in G$, $g \cdot x = x \Leftrightarrow g_0 g g_0^{-1} \cdot y = y$, ce qui montre que $G_x$ est envoyé sur $G_y$ par conjugaison. En particulier, $y$ est un pôle et $|G_x| = |G_y|$. La relation orbite stabilisateur donne de plus $n = |G_x||\mathcal{O}(x)|$.

On considère alors (comme dans la démonstration de la formule de Burnside), l'ensemble des couples $(g, x)$ où $g \in G \setminus \{e\}$ et $x$ est un pôle relatif à $g$. On va compter ces couples de deux manières différentes. La condition $g \neq e$ indique que pour $g$ donné, il y a exactement deux pôles $x$ de $g$. Le nombre $A$ de tels couples vaut donc $A = 2(n-1)$.

Par ailleurs, fixant un pôle $x$ de $G$, il y a exactement $|G_x| - 1$ éléments de $G \setminus \{e\}$ qui fixent $x$. On a donc l'égalité

$$A = \sum_{x \in \mathscr{P}} (|G_x| - 1).$$

En notant $\mathscr{C}$ l'ensemble des orbites des divers pôles et en utilisant la conservation de $|G_y|$ pour $y$ parcourant une orbite $C$ (qu'on note alors $n_C$), on obtient

$$A = \sum C \in \mathscr{C} |C|(n_C - 1).$$

En égalant à l'autre calcul, on obtient$2(n-1) = \sum C \in \mathscr{C} |C|(n_C - 1)$, soit (avec $n = n_C|C|$)

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{C \in \mathscr{C}} \left(1 - \frac{1}{n_C}\right). \tag{1}$$

**Discussion de l'équation aux classes.** $n > 1$ donc $1 \leqslant 2 - \frac{2}{n} < 2$. Dans $\sum_{C \in \mathscr{C}} \left(1 - \frac{1}{n_C}\right)$, il y a donc au moins deux termes non nuls, et puisque $n_c \geqslant \frac{1}{2}$, au plus trois.

a) Cas de deux termes non nuls. (1) s'écrit alors

$$2 = \frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2}.$$

$\frac{n}{n_1}$ et $\frac{n}{n_2}$ sont des entiers non nuls donc $n_1 = n_2 = n$. Les deux orbites correspondantes sont donc réduites à un unique élément ($x_1$ et $x_2$). Ainsi, $G$ laisse fixe l'axe $(x_1, x_2)$ donc est un sous groupe de rotations d'axe $(x_1, x_2)$, donc est cyclique (car s'identifie à un sous groupe fini de $\mathcal{SO}(2)$).

b) Cas de trois termes non nuls. (1) s'écrit

$$1+\frac{2}{n}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}$$

où on peut choisir $2 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$. Comme $1+\frac{2}{n}>1$, il doit exister $n_i$ tel que $n_i = 2$. Donc $n_1 = 2$ et $\frac{1}{n_2}+\frac{2}{n}=\frac{1}{n_3}$. On doit avoir $\frac{1}{2}+\frac{2}{n}>\frac{1}{2}$, ce qui impose $n_2 = 2$ ou $n_2 = 3$.

- Si $n_1 = n_2 = 2$. La relation ci-dessus donne $n = 2n_3$. L'orbite correspondant à $n_3$, notée $C_3$, a donc $\frac{n}{n_3} = 2$ éléments (diamétralement opposés car fixés par exactement $n/2$ éléments de $G$, éléments qui s'identifient à un sous groupe d'ordre $n/2$ de $\mathcal{SO}(2)$, noté $H$), notés $N$ et $S$. Les deux orbites correspondant à $n_1$ et $n_2$ ont toutes deux $\frac{n}{2}$ pôles, pôles qui sont nécessairement situés dans le plan orthogonal à $(NS)$ (car $\{N, S\}$ est invariant sous $G$). En outre, les $n/2$ pôles de $C_1$ décrivent dans $(NS)^{\perp}$ un polygône régulier sous l'action de $H$. Par cardinalité, $C_1 = \mathcal{O}(x)$ sous $H$, avec $x$ pôle de $C_1$ quelconque. Ce polygone, comme orbite sous $G$, est donc globalement invariant par $G$. Ainsi, $G$ peut être vu comme sous groupe de $D_{n/2}$. Par cardinalité, $G \simeq D_{n/2}$.
- Si $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$. (1) s'écrit $\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{n}$ avec $n_3 \geqslant 3$. Il y a alors trois possibilités :
  - $n_3 = 3$ donc $n = 12$. Sous $G$, on dispose donc de deux orbites de quatre pôles fixés chacun par trois éléments de $G$ ($C_2$ et $C_3$), et une orbite de 6 pôles fixés par 2 éléments ($C_1$). Les éléments non triviaux de $G$ sont donc d'ordre 2 ou 3. Comme les points de $C_1$ sont diamétralement oppposés (deux points opposés sont fixés par les mêmes éléments), $C_1$ correspond à 3 sous groupes d'ordre 2 de $G$. Notant $C_2 = \{a, b, c, d\}$, L'action de $G$ sur $C_2$ induit un morphisme de $G$ dans $\mathfrak{S}_4$, injectif car si $g$ fixe quatre points, c'est l'identité. Or, l'unique sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ d'ordre 12 est $\mathfrak{A}_4$, ce qui montre que $G \simeq \mathfrak{A}_4$.
  - $n_3 = 4$ donc $n = 24$. Sous $G$, on a une orbite $C_1$ de 12 points fixés par 2 éléments, une orbite $C_2$ de 8 points fixés par 3 éléments et une orbite $C_3$ de 6 points fixés par 4 éléments.
    Les 8 pôles de $C_2$ sont deux à deux diamétralement opposés (fixés par le même nombre d'éléments) donc $C_2$ contient 4 paires de points opposés. $G$ agit permute ces paires puisqu'il fixe $C_2$, ce qui induit un morphisme de $G$ dans $\mathfrak{S}_4$. Ce morphisme est injectif car si $g$ fixe les quatre paires, il laisse globalement invariantes quatres droites de l'espace qui engendrent au moins un plan. Il induit donc une homothétie sur ledit plan. Comme $g \in \mathcal{SO}(3)$, la complétion d'une base orthogonale du plan en une base directe orthogonale de l'espace montre (via l'écriture canonique de $g$) que $g$ est l'identité. Ainsi, $G = \mathfrak{S}_4$.
  - $n_3 = 5$ donc $n = 60$. Sous $G$, on dispose d'une orbite $C_1$ de 30 points fixés par 2 éléments, d'une orbite $C_2$ de 20 points fixés par 3 éléments et d'une orbite $C_3$ de 12 points fixés par 5 éléments. Les éléments de $G$ non triviaux sont donc d'ordre 2, 3 ou 5. Comme les pôles d'une même orbite sont deux à deux diamétralement opposés, $C_1$ fournit 15 sous groupes d'ordre 2, $C_2$, 10 sous groupes d'ordre 3 et $C_3$, 6 sous groupes d'ordre 5 (tous de la forme $G_x$). Or, puisque tout sous groupe cyclique correspond à un pôle, les seuls groupes cycliques sont ceux-là, et deux sous groupes cyclique quelconques s'intersectent trivialement.
    Montrons alors que $G$ est simple. Soit $H$ un sous groupe distingué de $G$ non réduit à $\{e\}$. Soit $x \in H$ non neutre. Tous les conjugués de $x$ sont dans $H$ donc, si $x$ est d'ordre 2, $H$ contient au moins 16 éléments, si $x$ est d'ordre 3, 21 et si $x$ est d'ordre 5, 25. Puisque $|H|$ divise $|G|$, $H$ contient au moins 30 éléments, donc au moins deux éléments d'ordre disctinct, donc a plus de 30 éléments. Finalement, $H = G$ et $G$ est simple. Comme il n'existe qu'un groupe simple d'ordre 60, $G = \mathfrak{A}_5$.