Combinatoire
Parimaths - niveau débutant

Florian Danard

22 février 2014

On rappel les formules suivantes :

- le nombre de permutation d'un ensemble a n éléments est $n! = 1.2.....n$

- le nombre d'arrangements à k éléments d'un ensemble à n éléments est

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- le nombre de combinaisons à k éléments d'un ensemble à n éléments est

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

Exercice 1. Montrer la formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

En déduire la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Exercice 2. Au poker chaque joueur reçoit deux cartes, sa "main", tirées au hasard dans un jeu de 52 cartes.
1- Combien de mains différentes existe-t-il ?
2- Combien de mains existe-t-il pour lesquels les deux cartes que l'on reçoit sont de la même couleur ?
3- Une bonne main est une main dont les deux cartes appartiennent à l'ensemble $\{10, valet, dame, roi, as\}$. Combien y a-t-il de bonnes mains ?
4- Combien y-a-t-il de bonnes mains de même couleur ?

Exercice 3. Dans une classe de 30 élèves quelle est la probabilité que deux élèves aient la même date d'anniversaire ?

Exercice 4. Un employé New Yorkais habite au carrefour de la 3ème rue et de la 5ème avenue et se rend tous les jours à son travail au carrefour de la 13ème rue et de la 12ème avenue. Il décide de prendre un chemin différent tous les jours (mais de longueur minimale !). Combien de jours tiendra-t-il ?

Exercice 5. Déterminer F_n le nombre de façons de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ par des dominos de dimension 1×2.

Exercice 6. On considère n points du plan, $n \geqslant 4$. On suppose qu'il n'y en a pas trois alignés et que les droites qu'ils définissent deux à deux sont sécantes en des points distincts. En combien de points ces droites se coupent-elles ?

Exercice 7. 1- Calculer $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ pour $0 \leq p \leq n$.
2- On appel dérangement d'un ensemble à n éléments une permutation qui n'a aucun point fixe. Soit D_n le nombre de dérangement d'un ensemble à n éléments. On pose $D_0 = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$$

3- Établir la formule

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Exercice 8. Une langue s'écrit avec n lettres. Une suite de lettres est un mot si toutes les lettres strictement entre deux lettres identiques sont différentes. Quel est le nombre de mots de longueur maximale ?

Exercice 9. Est-il possible de paver un carré auquel on a retiré deux coins opposés avec des dominos ?

Exercice 10. On place 2010 arbres en rond. Sur chaque arbre, un corbeau vient se placer. A chaque étape, deux corbeaux se déplacent vers un arbre voisin. Est-il possible qu'au bout d'un certain temps, tous les corbeaux se trouvent sur le même arbre ?

Exercice 11. Soit (S_n) une suite définie pour $n \geqslant 0$ par :

$(i) S_n = 1$ pour $0 \leq n \leq 2011$

$(ii) S_{n+2012} = S_{n+2011} + S_n$ pour $n \geqslant 2012$

Montrer que, pour tout entier positif a, $S_{2011a} - S_a$ est multiple de 2011.