

PARIMATHS - MATHEMATICAL OLYMPIADS CLUB

ARITHMÉTIQUE

Séance du samedi 30 novembre 2013

1 Avant-Propos

La séance d'aujourd'hui avait pour de découvrir le monde merveilleux de l'**arithmétique** : nous avons donc passé en revue quelques propriétés arithmétiques élémentaires :

- Soit a un entier. L'ensemble des multiples de a est stable par addition, soustraction, multiplication **par un entier**, mais **pas** par division.
- Soit a , b et c trois entiers tels que a divise b . Alors a divise b si et seulement si a divise $b + c$, si et seulement si a divise $b - c$.
- Soit a et b deux entiers tels que a divise b . Si $b \neq 0$, alors $|a| \leq |b|$.
- Soit a et b deux entiers tels que $a < b$. Alors $a \leq b - 1$.
- **Propriété de Bézout** : Soit a et b deux entiers, et d leur PGCD ; il existe deux entiers x et y tels que $ax + by = d$.

L'algorithme **étendu** d'Euclide permet de calculer de tels entiers x et y .

- **Lemme de Gauss** : Soit a , b et c trois entiers tels que a divise bc ; si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, alors a divise c .
- **Unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers**, et critère permettant de tester si un entier a divise un entier b en comparant les décompositions de a et de b en produits de facteurs premiers.

Faute de temps, nous n'avons pas pu aller plus loin ; les propriétés ci-dessus permettent cependant de répondre aux exercices 1 à 6, que nous avons donc taités pendant la séance.

2 Exercices proposés

Exercice 1

Connaissez-vous un critère de divisibilité par 2 ? 3 ? 4 ? 5 ? 6 ? 7 ? 8 ? 9 ? 10 ? 11 ? 12 ?

Exercice 2

Soient a et b des entiers. Montrer que $2a + 8b$ est divisible par 9 si et seulement si $7a + 10b$ l'est.

Exercice 3

Pour quels entiers naturels non nuls n l'entier $n^2 + 3$ divise-t-il l'entier $n + 3$?

Exercice 4

Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet (au moins) un facteur premier ; que n s'écrit comme produit de facteurs premiers.

Indication : regarder le deuxième plus petit facteur positif de n .

Exercice 5

En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD et le PPCM de 60 et de 96 ; trouver des entiers a et b tels que $60a + 96b = 12$.

Exercice 6

Trouver toutes les paires d'entiers (a, b) telles que $a^2 + 2a = b^2$.

Exercice 7

Trouver le nombre de diviseurs de 120.

Exercice 8

Pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{3n^2+5}{2n^2+1}$ est-elle irréductible ?

Exercice 9

Montrer que les critères de divisibilité par 3, 9, et 11 trouvés ci-dessus sont corrects.

Exercice 10

Soit a et b deux entiers. Est-il nécessairement vrai que a divise b si et seulement si a^2 divise b^2 ? si et seulement si a divise b^2 ?

Exercice 11

Soit $a \geq 1$ et $b \geq 2$ deux entiers tels que $a^b - 1$ est un nombre premier. Montrer que $a = 2$ et que b est un nombre premier.

Exercice 12

Soit $a \geq 2$ et $b \geq 1$ deux entiers tels que $a^b + 1$ est un nombre premier. Montrer que a est pair et que b est une puissance de 2.