Parimaths - Mathematical Olympiads Club

Théorie et pratique des jeux

Séance du samedi 21 septembre 2013

1 Jeux finis à information parfaite

Exercice 1 (Fort Boyard)
Cédric Villani et le Père Fouras jouent à une célèbre variante du jeu de Nim : devant eux se trouvent 2013 allumettes. Chacun à son tour, ils prennent entre 1 et 5 allumettes. Celui qui prend la dernière allumette a gagné. Cédric doit-il choisir de commencer la partie, ou bien de céder la main au Père Fouras ?

Exercice 2 (Fort Boyard : la revanche)
Le Fort exige une revanche : La Boule affronte donc Terence Tao. Cette fois-ci se trouvent 2013 piles, contenant chacune 2013 allumettes. Chacun à son tour, ils choisissent une pile (non vide) dont ils prennent ente 1 et 5 allumettes. Celui qui prend la dernière allumette a gagné. Terence doit-il choisir de commencer la partie ?

Exercice 3 (Pas de bras, pas de chocolat !)
Charlie et Willie Wonka se disputent une tablette de chocolat rectangulaire, composée de 2013×2012 carreaux, qu'ils tiennent devant eux. Chacun à son tour, ils choisissent un carré **C**, et le mangent ainsi que tous les carrés qui se trouvent en haut et à droite de **C**. Les carreaux situés dans le carré 2×2 en bas à gauche sont cependant composés de chocolat blanc : quiconque mange un tel carreau a perdu. Charlie doit-il choisir de commencer la partie ?

2 Arbres enracinés

Exercice 4 (Théorème de König)
Soit A un arbre enraciné, dont tous les sommets sont de degré fini. On suppose que A ne contient aucun chemin infini. Montrer que A est lui-même fini.

Exercice 5 (Théorème de König : rien ne va plus !)
Soit A un arbre enraciné. On suppose que A ne contient aucun chemin infini. Existe-t-il nécessairement une borne B sur la longueur des chemins de A ?

Exercice 6 (Théorème de Zermelo)
Mileva Einstein et Marge Simpson jouent à un jeu $\mathcal{G}$ à information parfaite, et où toute partie est finie, se terminant par une victoire d'une des deux joueuses. Elles jouent chacune à leur tour, Mileva commençant la partie. Montrer que soit Mileva, soit Marge a une stratégie gagnante.

Exercice 7 (Théorème de Zermelo : le retour)
Albert et Homer jouent à un jeu $\mathcal{G}'$ différent de celui de leurs femmes : là encore, toute partie est finie et se terminant par une victoire d'un des deux joueurs. Cependant, à chaque tour, ils jouent simultanément, et les conséquences de cette action conjointe sont alors parfaitement connues. Montrer qu'il n'existe pas nécessairement de stratégie gagnante pour Albert ni pour Homer.

3 Un petit calcul...

Exercice 8 (Énumération des fonctions calculables)
Montrer que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ « calculables » (c'est-à-dire qu'il existe un programme $\mathcal{P}_f$, écrit dans le langage de votre choix, qui prend un entier n en entrée et, après un temps fini, donne $f(n)$ en sortie) est dénombrable.

Exercice 9 (Une fonction qui croît beaucoup trop vite)
On note f_i la i-ième fonction calculable. Montrer que la fonction $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $F(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} f_i(n)$ n'est pas calculable. En déduire qu'on ne peut pas décider, a priori, si une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est calculable ou pas.

Exercice 10 (Théorème de Zermelo : un choix cornélien)
Revenons au jeu de Mileva et Marge, donné dans l'exercice 6. L'une des deux joueuses dispose d'une stratégie gagnante : montrer qu'elle ne peut cependant pas nécessairement calculer une telle stratégie.

4 Savoir choisir ses objectifs

Exercice 11 (Les échecs de George Walker Bush)
Depuis peu, George W. Bush joue aux échecs en ligne. Aujourd'hui, il joue les blancs contre Гарри К. Каспаров et les noirs contre Judit Polgár. George dispose d'une méthode infaillible pour s'en sortir avec une victoire et une défaite, ou bien d'arracher le match nul dans les deux parties. Saurez-vous identifier une telle méthode ?

Exercice 12 (Le tarot à 5 : une stratégie inepte ?)
Le tarot à 5 se joue en 10 manches, au cours desquelles chaque joueur doit accumuler le plus de points possibles. Au cours de chaque manche, un joueur « appelle » un autre joueur : à la fin de la manche, il aura gagné $2n$ points, son acolyte n points, et leurs 3 adversaires coalisés $-n$ points, où n est un entier relatif qui dépend du déroulement de la partie (il se peut aussi que le joueur s'appelle lui-même, auquel cas il gagne $4n$ points). Montrer que, dans certaines situations, un joueur peut avoir intérêt à minimiser le nombre de points qu'il recevra.

Exercice 13 (La dame de pique)
La dame de pique est un jeu à 4 joueurs, qui se joue en 100 points : dès qu'un joueur a 100 points, la partie est finie. Le joueur qui a alors le moins de points a gagné (les ex-æquo sont possibles). Pourquoi la partie devient-elle souvent beaucoup plus folle vers la fin qu'au début ?

5 Jeux à somme non nulle

Exercice 14 (Le dilemme des prisonniers)
Lors du goûter, Adam et Ève viennent de manger une pomme ; Dieu vient les gronder :
- si chacun protège l'autre, ils seront punis 1 jour ;
- si chacun dénonce l'autre, ils seront punis 10 jours ;
- si un seul d'entre eux dénonce l'autre, il ne sera pas puni, et l'autre sera puni 11 jours.

À la place d'Adam ou d'Ève (choisissez le personnage auquel vous vous identifiez le plus), que feriez-vous ?

Exercice 15 (Le dilemme des prisonniers : à un jour près)
Dieu étant naturellement clément, il réajuste les peines :
– si un seul des deux dénonce son acolyte, l'acolyte en question sera puni 10 jours au lieu de 11.
Changeriez-vous de stratégie ?

Exercice 16 (Jeu du croisement)
Deux semaines plus tard, après le goûter, Dieu revoit Adam et Ève manger une pomme. Furieux, il propose d'autres peines, punissant avec véhémence les menteurs potentiels :
– si chacun protège l'autre, ils seront punis 10 jours ;
– si chacun dénonce l'autre, ils seront punis 3 jours ;
– si un seul d'entre eux dénonce l'autre, il ne sera pas puni, et l'autre sera puni 8 jours.
À la place d'Adam ou d'Ève, que feriez vous ? Et si la punition en cas de dénonciation unilatérale est de 5 jours au lieu de 8 ?

Exercice 17 (Jeu cyclique)
Le diable intervient alors. Vicieux comme il est, il suggère à Dieu les punitions suivantes :
– si chacun protège l'autre, ils seront punis 10 jours ;
– si chacun dénonce l'autre, ils seront punis 9 jours ;
– si Adam dénonce Ève, il sera puni 5 jours et elle 12 ;
– si Ève dénonce Adam, elle sera punie 7 jours et lui 14.
Que pouvait-il avoir en tête en faisant une telle proposition ?

6 Jeux psychologiques

Exercice 18 (Jeu de Saint-Pétersbourg)
Évariste Galois propose à Kurt Gödel un jeu d'argent, pour lequel Kurt doit d'abord lui donner une somme de E euros. Le jeu se déroule alors comme suit : Leopold met 1 euro dans une tirelire, tandis que Kurt prend une pièce équilibrée. Puis Kurt lance la pièce : si elle est tombée sur pile, il récupère le contenu de la tirelire ; sinon, Leopold double le contenu de la tirelire, et le jeu repart comme avant : Kurt lance la pièce, récupère le contenu de la tirelire si la pièce est tombée sur pile, etc. À la place de Kurt, pour quelles valeurs de E accepteriez-vous de jouer à ce jeu ?

Exercice 19 (Paradoxe des deux enveloppes)
David Hilbert donne deux enveloppes à Alan Turing. Chaque enveloppe contient un réel positif, et l'un des deux réels est le carré de l'autre. David offre à Alan de choisir une des deux enveloppes, de l'ouvrir et de gagner, en euros, le montant indiqué dans l'enveloppe. Mais il lui offre le droit, après lecture du premier réel, de changer d'enveloppe s'il le désire. Ce droit additionnel change-t-il quoi que ce soit à l'espérance de gain de David ?

Exercice 20 (Un partage équitable)
Karl Marx propose à John M. Keynes et à Milton Friedman de jouer à un jeu coopératif. Initialement, il leur confie 1000 dollars. John propose alors à Milton de garder une somme de D dollars, et il gardera le reste des 1000 dollars. Si Milton accepte, l'affaire est entendue ; s'il refuse, Karl repart avec les 1000 dollars dans la poche. À la place de John, quelle valeur de D proposeriez-vous ? À la place de Milton, à partir de quelles valeurs de D accepteriez-vous de faire affaire avec John ? Et si le montant initial était de 10 millions d'euros ?