Parimaths - Mathematical Olympiads Club

Nombres p-adiques et nombres réels

Séance du samedi 1er mars 2014

La séance d'aujourd'hui a pour but d'étudier deux extensions des nombres rationnels : les célèbres nombres *réels*, et les moins célèbres nombres p-adiques.

1 Les nombres réels

1.1 Écriture décimale

Exercice 1
Montrer que les nombres *décimaux* sont les nombres rationnels de la forme $\frac{p}{q}$, où q est un entier n'ayant aucun facteur premier distinct de 2 et 5.

Exercice 2
Montrer que les nombres *rationnels* sont les nombres dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain point.

Exercice 3
Y a-t-il une différence entre les réels 1 et $0,99999\ldots$?

Exercice 4
Montrer que tout nombre réel admet un unique développement décimal ne se terminant pas par une infinité de 9.

Exercice 5
Soit a, b deux nombres *réels* de développement décimaux $a = 0,a_1a_2\ldots$ et $b = 0,b_1b_2\ldots$. On note $C^{(n)} = 0,C_1^{(n)}C_2^{(n)}\ldots C_{2n}^{(n)}$ le produit des nombres décimaux $A^{(n)} = 0,a_1a_2\ldots a_n$ et $B^{(n)} = 0,b_1b_2\ldots b_n$.
Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, que la suite de chiffres $C_n^{(n)}, C_n^{(n+1)}, \ldots$ admet une *limite* (que l'on notera $C_n^{(\infty)}$). Montrer ensuite que $0,C_1^{(\infty)}C_2^{(\infty)}\ldots$ est un développement décimal du produit $c = a \times b$.

1.2 Écriture en base b

Exercice 6
Soit $b \geq 2$ un entier. Montrer que tout entier admet une unique écriture en base b.

Exercice 7
Reprendre les exercices ci-dessus en parlant d'écriture en base b plutôt que d'écriture décimale.

2 Les nombres 10-adiques

2.1 Découverte d'un monde étrange

Exercice 8
Quelle est la différence entre les entiers -1 et $\dots 999$?

Exercice 9
Soit a, b deux entiers 10-*adiques* de développements 10-adiques $a = \dots a_2 a_1 a_0$ et $b = \dots b_2 b_1 b_0$. Montrer que le produit $c = a \times b$ est bien en entier 10-adique, dont le développement 10-adique $c = \dots c_2 c_1 c_0$ est tel que $c_n c_{n-1} \dots c_0 \equiv a_n a_{n-1} \dots a_0 \times b_n b_{n-1} \dots b_0 \pmod{10^{n+1}}$.

Exercice 10
Soit p un nombre premier. Montrer que le rationnel $\frac{1}{p}$ admet un unique développement 10-adique.

Exercice 11
Montrer que tout rationnel admet un unique développement 10-adique.

Exercice 12
Montrer qu'un nombre 10-adique est rationnel si et seulement si son développement 10-adique est périodique à partir d'un certain point.

Exercice 13
Montrer qu'il existe deux nombres 10-adiques non nuls dont le produit est nul.

2.2 Les p-adiques

Exercice 14
Reprendre les exercices ci-dessus en s'intéressant aux nombres p-adiques, où p est un nombre premier.

3 Réels et 3-adiques, même combat ?

Exercice 15
Montrer que nul nombre 3-adique n'est une racine carrée de 2.

Exercice 16
Montrer qu'il existe exactement deux nombres 3-adiques qui sont des racines carrées de -2.