Relations d'ordre

Club ParisMaths - groupe avancé

Noé de Rancourt

22 février 2013

1. Généralités

Soit X un ensemble. Une *relation* $\mathcal{R}$ sur X est une partie de X^2 ; étant donnés x et y deux éléments de X, on notera $x\mathcal{R}y$ plutôt que $(x, y) \in \mathcal{R}$. Une *relation d'ordre* sur X est une relation $\leqslant$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :

(Réflexivité) $\forall x \in X,\ x \leqslant x$;

(Transitivité) $\forall x, y, z \in X,\ (x \leqslant y$ et $y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$;

(Antisymétrie) $\forall x, y \in X,\ (x \leqslant y$ et $y \leqslant x) \Rightarrow x = y$.

On dit que la relation $\leqslant$ est totale si elle vérifie de plus la propriété suivante :

$\forall x, y \in X,\ x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

À une relation d'ordre $\leqslant$, on associe la relation d'ordre stricte $<$ définie par $x < y \Leftrightarrow (x \leqslant y$ et $x \neq y)$.

Exercice 1

Donnez des exemples de relations d'ordre que vous connaissez (cherchez bien, on ne vous les a peut-être pas toutes présentées comme telles !) Lesquelles sont totales ?

Soit X un ensemble ordonné et $x \in X$. On dit que x est un *élément minimal* s'il n'existe pas de $y \in X$ tel que $y < x$. On dit que x est un *plus petit élément* (ou un *minimum*) si pour tout $y \in X$, on a $x \leqslant y$. On dit que l'ordre $\leqslant$ est *bien fondé* si toute partie non-vide de X admet un élément minimal, et que c'est un *bon ordre* si toute partie non-vide de X admet un plus petit élément.

Exercice 2

(1) Quelle est la différence entre un plus petit élément et un élément minimal ? Dans quel cas ces notions coïncident-elles ? Donner un exemple d'élément minimal qui n'est pas un plus petit élément.

(2) Montrer que si un plus petit élément existe, alors il est unique. Est-ce le cas pour les éléments minimaux ?

Exercice 3

(1) Donner un exemple de bon ordre.

(2) Quels sont les éléments minimaux de $(\mathbb{N}, |)$? De $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$? Et ses éléments maximaux ? $(\mathbb{N}, |)$ est-il bien fondé ?

Exercice 4

(1) Montrer qu'un ordre est bon si et seulement s'il est total et bien fondé.

(2) Montrer que $(X, \leqslant)$ est bien fondé si et seulement s'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de X.

Exercice 5

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur l'ensemble X pour que l'ordre $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ soit bien fondé.

Exercice 6

Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer qu'on a équivalence entre :

(1) X est fini ;

(2) Toute partie non-vide de X admet un plus petit et un plus grand élément.

2. Opérations sur les ordres

Dans cette partie, on considère n ensembles ordonnés X_1, ..., X_n, dont les relations d'ordre seront toutes notées $\leqslant$.

Exercice 7

On suppose X_1, ..., X_n deux-à-deux disjoints. Construire une relation d'ordre sur $X_1 \cup ... \cup X_n$ qui correspond à l'idée de « mettre bout à bout » les ensembles X_1, ..., X_n dans cet ordre. Montrer qu'elle est totale (resp. bien fondée, bonne) lorsque les relations d'ordre sur X_1, ..., X_n sont toutes totales (resp. bien fondées, bonnes).

Sur le produit $X_1 \times ... \times X_n$ on définit deux relations d'ordre :

- *L'ordre produit*, noté $\leqslant_{prod}$, et défini par $(x_1, ..., x_n) \leqslant_{prod} (y_1, ..., y_n)$ si et seulement si $x_i \leqslant y_i$ pour tout indice i ;
- *L'ordre lexicographique*, noté $\leqslant_{lex}$, dont l'ordre strict $<_{lex}$ associé est défini de la façon suivante : $(x_1, ..., x_n) <_{lex} (y_1, ..., y_n)$ si et seulement s'il existe un indice i tel que $x_i < y_i$ et tel que pour tout $j < i$, $x_j = y_j$.

Exercice 8

(1) Montrer que l'ordre produit est une relation d'ordre.

(2) Supposons que X_1, ..., X_n soient totalement ordonnés. L'ordre produit est-il total ? (Faire un dessin)

(3) Montrer que si les ordres sur X_1, ..., X_n sont bien fondés, alors l'ordre produit aussi. Cela reste-t-il vrai en remplaçant « bien fondé » par « bon » ?

Exercice 9

(1) Vous avez déjà rencontré et utilisé l'ordre lexicographique. Dans quel contexte ?

(2) Montrer que l'ordre lexicographique est une relation d'ordre.

(3) Montrer que si les ordres de X_1, ..., X_n sont totaux (resp. bien fondés, bon) alors l'ordre lexicographique est total (resp. bien fondé, bon).

3. Applications croissantes, isomorphismes

Soient X et Y deux ensembles ordonnés, et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est *croissante* si $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$. On dit qu'elle est *strictement croissante* si $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Un *isomorphisme* est une bijection croissante de réciproque croissante. On dit que X et Y sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre les deux ; intuitivement, cela signifie que X et Y sont identiques en tant qu'ensembles ordonnés, lorsqu'on fait abstraction de la nature de leurs éléments. En particuliers, ils auront exactement les mêmes propriétés dépendant de l'ordre.

Exercice 10

Une bijection croissante est-elle forcément un isomorphisme ?

Exercice 11

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. On munit A et $\mathbb{N}$ de l'ordre usuel. Montrer que A et $\mathbb{N}$ sont isomorphes.

Exercice 12

Montrer que deux ensembles finis totalement ordonnés de même cardinal sont isomorphes.

Exercice 13

Soit $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, l'ensemble des suites infinies d'entiers naturels qui sont nulles à partir d'un certain rang. On le munit de l'ordre produit, défini par $(x_n) \leqslant_{prod} (y_n)$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant y_n$ (c'est exactement la même définition que dans le cas des produits finis, et on montre de la même façon que c'est une relation d'ordre). Montrer que $(\mathbb{N}^*, |)$ et $(\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, \leqslant_{prod})$ sont isomorphes.

Un ensemble ordonné est dit *dense* si $\forall x, y \in X, x < y \Rightarrow \exists z \in X, x < z < y$; il est *sans extrémités* si $\forall x \in X, \exists y, z \in X, y < x < z$.

Exercice 14

(1) Donner des exemples d'ordres denses sans extrémités.

(2) Montrer que deux ordres denses sans extrémités dénombrables sont isomorphes.

4. Bons ordres

Dans toute cette partie, sauf mention contraire, X et Y désignent des ensembles bien ordonnés.

Exercice 15

Soit $\mathcal{P}(x)$ une propriété dépendant d'un élément x de X. On suppose que pour tout $x \in X$, si pour tout $y < x$, $\mathcal{P}(y)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X$.

(C'est le *principe de récurrence transfinie*, une généralisation de la récurrence forte sur $\mathbb{N}$. Rappelons à toutes fins utiles que $\forall x \in \varnothing$, $\mathcal{P}(x)$ est toujours vrai ; c'est pour cette raison qu'il n'y a pas besoin d'initialisation.)

Exercice 16

Soit $f : X \to X$ une application strictement croissante. Montrer que pour tout $x \in X$, $f(x) \geqslant x$.

Un *segment initial* de X est une partie A de X vérifiant $\forall x \in A$, $\forall y \in X \setminus A$, $x < y$. Pour tout $a \in X$, on note $S_a = \{x \in X \,|\, x < a\}$.

Exercice 17

(1) Montrer que X et les S_a sont des segments initiaux de X.

(2) Montrer que tout segment initial de X est de l'une des formes précédentes. Cela reste-t-il vrai si l'on ne suppose plus que X est bien ordonné ?

(3) Soient S et T deux segments initiaux de X et $f : S \to T$ un isomorphisme. Montrer que $S = T$ et que f est l'identité.

On notera $X \preccurlyeq Y$ si X est isomorphe à un segment initial de Y.

Exercice 18

(1) Montrer que la relation $\preccurlyeq$ est réflexive et transitive.

(2) Montrer que si $X \preccurlyeq Y$ et $Y \preccurlyeq X$, alors X et Y sont isomorphes.

$\preccurlyeq$ est donc « presque » une relation d'ordre, à isomorphisme près. Dans la suite, on travaillera, sans le repréciser à chaque fois, dans un ensemble $\mathcal{A}$ d'ensembles bien ordonnés, de sorte que, restreinte à $\mathcal{A}$, $\preccurlyeq$ soit une « vraie » relation d'ordre.

(3) Montrer que $\preccurlyeq$ est un ordre total.

(4) Montrer que $\preccurlyeq$ est un bon ordre.