

## Inégalités 2.

*Mikhail Isaev*  
ISAEV.M.I@GMAIL.COM  
09/11/2013

### Partie 1. L'usage des inégalités entre les moyennes.

Montrer que :

1)  $2(a^4 + b^4) + 16 \geq 16ab$ .

2)  $\sqrt{6a_1 + 1} + \sqrt{6a_2 + 1} + \sqrt{6a_3 + 1} + \sqrt{6a_4 + 1} + \sqrt{6a_5 + 1} \leq \sqrt{55}$   
où  $a_1, \dots, a_5 \geq 0$  et  $a_1 + \dots + a_5 = 1$ .

3)  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$  où  $a, b > 0$  et  $a + b = 1$ .

4)  $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$ .

5)  $6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$  où  $a, b, c \geq 0$ .

6)  $(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c) \leq (a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$  où  $a, b, c, d > 0$ .

7)  $\cos^3 t \sin t \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$ .

8)  $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{2}(x - y)$  où  $xy = 1$ .

9)  $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  où  $a, b, c$  sont les côtés d'un triangle.

10)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$  où  $n \in \mathbb{N}$ .

11)  $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3} \leq \sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)}$  où  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$ .

12)  $n(n+1)^{1/n} < n + S_n$  où  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$

13) Trouver toutes les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}}, \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}. \end{cases}$$

## Partie 2. Les problèmes à résoudre indépendamment.

1) Trouver toutes les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Montrer que

2)  $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$  où  $n = 2, 3, 4, \dots$

3)  $\frac{\log(a-1)}{\log a} < \frac{\log a}{\log(a+1)}$  où  $a > 1$ .

4)  $abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$  où  $a, b, c > 0$ .

5)  $\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 + \dots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}$   
où  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  et  $x_1 + \dots + x_n = 1$ .

6)

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} + \dots + \sqrt[n]{k_1 \dots k_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1 + \dots + k_1)(a_2 + b_2 + \dots + k_2) \dots (a_n + b_n + \dots + k_n)}$$

où  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, \dots, k_1, \dots, k_n > 0$ .

7)  $n - S_n > \frac{n-1}{n^{1/(n-1)}}$  où  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ,  $n = 3, 4, \dots$

8)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$  où  $n \in \mathbb{N}$ .

9)  $na^k - ka^n \leq n - k$  où  $n > k$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ .

10)  $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$  où  $a, b, c > 0$ .