Inégalités. La méthode de Sturm

Mikhail Isaev
ISAEV.M.I@GMAIL.COM
05/10/2013

Partie 1. Les exercices

0.1) (La diminution de la somme au cours du rapprochement qui préserve le produit).
Soient a, x, y tels que $a > 0$ et $x < a < y$. Montrer que $x + y > a + \dfrac{xy}{a}$.

0.2) (L'accroissement du produit au cours du rapprochement qui préserve la somme).
Soient a, x, y tels que $0 < x < a < y$. Montrer que $xy < a(x + y - a)$.

Montrer que :

1) (L'inegalité de Cauchy) $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ où $x_1, \ldots, x_n > 0$.

2) $\sqrt[2]{\dfrac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

3) $\dfrac{(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n)}{x_1 \ldots x_n} \geq (n - 1)^n$ où $x_1, \ldots, x_n > 0$ et $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

4) $\dfrac{1}{1 + x_1} + \ldots + \dfrac{1}{1 + x_n} \geq \dfrac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}$ où $x_1, \ldots, x_n \geq 1,\ n \geq 2$.

5) $abc + bcd + cda + dab \leq \dfrac{1}{27} + \dfrac{176}{27} abcd$ où $a, b, c, d \geq 0$ et $a + b + c + d = 1$.

6) $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \dfrac{7}{27}$ où $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z = 1$.

7) Parmi tous les triangles avec des angles ne dépassant pas 75 degrés ($= \frac{5\pi}{12}$), qui sont inscrits dans un cercle donné
a. trouver celui dont le périmètre est le plus petit ;
b. trouver celui dont le périmètre est le plus grand.

8) (L'inegalité de Karamata). Soit f une fonction convexe sur un intervalle $[a, b]$.
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in [a, b]$ tels que $y_1 \geq y_2 \geq \ldots, y_n$ et

$$y_1 \leq x_1, \quad y_1 + y_2 \leq x_1 + x_2, \quad \ldots, \quad y_1 + \ldots + y_{n-1} \leq x_1 + \ldots + x_{n-1},$$
$$y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_n.$$

Montrer que $f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n) \leq f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$.

9) Montrer que

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n (\tan\alpha_1 + \ldots + \tan\alpha_n) \leq \frac{(n-1)^{(n-1)/2}}{n^{(n-2)/2}},$$

où $n \geq 2$ et $0 \leq \alpha_i < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Partie 2. Les problèmes à résoudre indépendamment.

Montrer que

1) $\dfrac{1}{1+x_1}+\dfrac{1}{1+x_2}+\ldots+\dfrac{1}{1+x_n}\leq\dfrac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}$ où $0<x_1,\ldots,x_n\leq 1,\ n\geq 2.$

2) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geq\sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$ où $a,b,c,d>0.$

3) $9\leq xy+yz+zx\leq\dfrac{9+x^2y^2z^2}{4}$ où $x+y+z=xyz,\ x,y,z>0.$

4) Soient $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$, $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, $n\geq 2$. Montrer que

a. $\dfrac{1+x_1}{x_1}\dfrac{1+x_2}{x_2}\ldots\dfrac{1+x_n}{x_n}\geq(n+1)^n.$

b. $\dfrac{1+x_1}{1-x_1}\dfrac{1+x_2}{1-x_2}\ldots\dfrac{1+x_n}{1-x_n}\geq\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n.$

5) Prouver que, parmi toutes n-gones convexes inscrits dans un cercle donné, le n-gone régulier a la plus grande aire.

6) Prouver que, parmi toutes n-gones convexes inscrits dans un cercle donné, le n-gone régulier a le plus grand périmètre.

7) Prouver que, parmi toutes polygones convexes inscrits dans un cercle donné, le triangle équilatéral a la plus grande somme des carrés des longueurs des côtés.

8) Montrer que pour n'importe quels deux triangles avec des angles α,β,γ et $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ on a

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma}\leq\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\tan\gamma}.$$