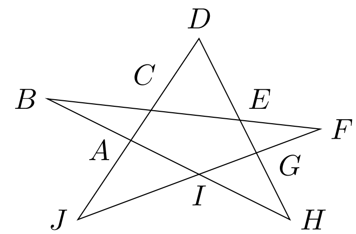
STRATÉGIES DE BASE

Exercice 1. a) Est-ce qu'on peut dessiner une étoile de façon que $AB < BC$, $CD < DE$, $EF < FG$, $GH < HI$ et $IJ < JA$?



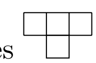
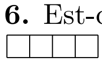
b) Prouvez que la somme des angles aux sommets B, D, F, H et J d'une étoile est 180°.

Exercice 2. On se donne un cercle de rayon 1 et n points dans le plan. Montrez qu'il existe un point sur le cercle tel que la somme des distances de ce point aux n points donnés est $\geqslant n$.

Exercice 3. Est-ce qu'on peut dessiner 9 segments dans le plan tels que chaque segment intersecte exactement trois autres segments ?

Exercice 4. Deux élèves jouent au jeu suivant : le jeu commence par le nombre 60, chacun son tour les élèves diminuent le nombre obtenu d'un de ses diviseurs. Perd celui qui obtient zéro. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 5. Montrez que 3^{2010} divise $2^{3^{2009}} + 1$.

Exercice 6. Est-ce qu'on peut paver une table 10×10 en utilisant a) des T-figures  ? b) des rectangles  ?

Exercice 7. Le produit des nombres réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est égal à 1. Prouver que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Exercice 8. Trouvez tous les polynômes P à coefficients réels tels que

$$xP(x-1) = (x-2)P(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit E le point à l'intérieur d'un carré $ABCD$ tel que $\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = 15°$. Prouver que le triangle ABE est équilatéral. (Figure 1)

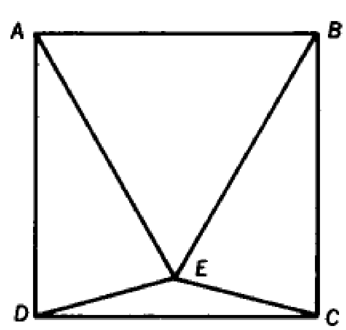


Figure 1

Exercice 10. Le plan est colorié en rouge et noir. Prouver qu'il y a deux points de même couleur à distance de 1 mètre.

Exercice 11. Le plan est colorié en a) 2 couleurs ; b) 3 couleurs ; c) 100 couleurs. Montrer qu'il existe un rectangles avec les sommets de même couleur.

Exercice 12. Soit $ABCD$ un parallélogramme et O un point à l'intérieur de $ABCD$ tel que $\widehat{OAD} = \widehat{OCD}$. Prouvez que $\widehat{OBC} = \widehat{ODC}$.

Exercice 13. Résoudre l'équation $3^m + 7 = 2^n$ en nombres entiers positifs.